نظريـــة الدوائر

الأستاذ الدكتور

عبد الفتاح ابراهيم عبد الفتاح

نظريـــة الدوائر

الأستاذ الدكتور

عبد الفتاح ابراهيم عبد الفتاح

المحتويات

	الصفحة
الفصل الأول	٣
الفصل الثانى	٢٣
الفصل الثالث	٦٢
الفصل الرابع	٧٧
الفصل الخامس	٩٦
الفصل السادس	١٣١
الفصل السابع	١٦٦
الفصل الثامن	١٩١
الفصل التاسع	٢٠٦
زائـــــدة	٢٢٤

الفصل الأول

مقدمه

INTRODUCTION

١-١ الشحنات الكهربية

Electric Charges

لا أحد يعرف على وجه التحديد متى بدأت علاقة الانسان بالكهرباء . ولكن الفضل يعزى الى طاليس(Thales , 640-546 BC) فى اكتشاف الخواص الكهربية للكهرمان (Amber). فقد لاحظ طاليس أنه عند دلك الكهرمان بقطعة من الحرير أو بقطعة من الفراء يصبح مكهربا ويصبح قادرا على جذب الأشياء الخفيفة.

وفى القرن الثامن عشر أجرى العلماء دراسات مكثفة حول الشحنات الكهربية التى أمكن الحصول عليها بدلك قضيب من الزجاج بقطعة من الحرير أو بدلك قضيب من المطاط بقطعة من الفراء.

ولقد أمكن ملاحظة وجود قوى على شكل تجاذب (Attraction)أو تنافر (Repulsion) بين الأجسام المشحونة . وفى التجارب العملية التى أجريت تم تعليق كرتين من مادة خفيفة مثل نخاع البيلسان (Pith balls)على مسافة سنتيمترات قليلة من بعضهما . ولاحظ العلماء أن الكرتين تبتعدان عن بعضهما عند لمس كل منهما بقضيب من الزجاج المشحون أو بقضيب من المطاط المشحون بالكهرباء. كما لاحظوا أن الكرتين تقتربان من بعضهما فى حالة لمس احداهما بقضيب الزجاج المشحون و لمس الأخرى بقضيب المطاط المشحون. وكان التفسير المقبول لهذه الظاهرة هو وجود نوعين من الشحنات وأن نوع الشحنة على قضيب الزجاج يختلف عن نوع الشحنة على قضيب المطاط. وقد استخدم بيامين فرانكلين (Benjamin Franklin 1706 – 1790) اسم الشحنة الموجبة (Positive Charge) لاحداهما والشحنة السالبة (Negative Charge) للأخرى. ولم يتوصل الباحثون بعد ذلك الى وجود نوع ثالث من الشحنات.

اكتشف كولوم (Charles A. Coulomb 1736 – 1806)أن القوى بين الشحنات تتناسب طرديا مع مقدار كل منهما وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة بينهما وهو ما يعرف بقانون كولوم (Coulomb's Law) حيث يصاغ فى الصورة الرياضية

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2}$$

حيث

F هى القوة بين الشحنتين بالنيوتن

Q_1 ، Q_2 هما قيمتا الشحنتين بالكولوم

r هى المسافة الفاصلة بين الشحنتين بالمتر

ϵ هى سماحية الوسط (Permittivity) و هى للفراغ ϵ_0 فاراد/ متر

حيث $\epsilon_0 = 8.84 * 10^{-12}$ Farad / m

بمزيد من الدراسة وجد العلماء أن الشحنات السالبة هى مضاعفات لكمية صغيرة من الشحنة يحملها جسيم من مكونات الذرة أطلق عليه اسم الالكترون (Electron) و كتلته تساوى $9.107 * 10^{-31}$ Kg . كما وجدوا أن الشحنات الموجبة هى مضاعفات لكمية صغيرة مساوية فى القيمة لشحنة الالكترون ويحملها جسيم من مكونات الذرة كتلته 1836 ضعفا من كتلة الالكترون ويعرف بالبروتون) (Proton. كما تبين من الدراسة أن ظهور الشحنات على الأجسام واختفائها هو نتيجة لحركة الالكترونات وانتقالها طبقا للقاعدة العامة أن **الشحنات لا تفنى ولا تستحدث** و هو ما يعرف بقانون بقاء الشحنه.

Law of conservation of charge

فى الظروف العادية تكون ذرات المواد متعادلة كهربيا . أى أن عدد الالكترونات داخل الذرة يكون مساويا لعدد البروتونات . وعندما تفقد الذرة الكترونا أو أكثر تصبح موجبة الشحنة و تعرف فى هذه الحالة بأنها أيون موجب Positive ion) (. و عندما تكتسب الذرة الكترونا أو أكثر تصبح سالبة الشحنة و تعرف فى هذه الحالة بأنها أيون سالب (Negative ion). وفى العادة يرمز للشحنات الكهربية بالرمز Q إذا كانت ثابتة القيمة . أما الشحنات المتغيرة مع الزمن فيرمز لها بالرمز $q_{(t)}$.

وفى النظام العالمى للوحدات (S I) تكون وحدة قياس الشحنة هى الكولوم (C) Coulomb. ويحتوى الكولوم الواحد من الشحنات السالبة على عدد $6.242 * 10^{18}$ الكترون حيث تبلغ شحنة الالكترون الواحد $-1.602 * 10^{-19}$ كولوم .

Example (1-1)

What is the total charge Q of two millions electrons

الحـــــــــل

$$Q = 2 * 10^{6} \; (-1.6 * 10^{-19})$$

$$= -\; 0.3204 \quad pC$$

Example (1-2)

Find the force of interaction between two charges spaced 5 cm in vacuum. $Q_1 = 0.02 \; \mu C$ & $Q_2 = 30 \; \mu C$

ألحـــــــــل

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon r^2}$$

$$= \frac{2 * 10^{-8} * 3 * 10^{-5}}{4 \pi * 8.84 * 10^{-12} * (5 * 10^{-2})^2}$$

$$= 2.16 \quad \text{Newton}$$

Electric Current ١-٢ ألتيـــــــــار ألكهربى

التيار الكهربى هو تعبير عن انتقال الشحنة من نقطة الى أخرى . ويعرف بأنـــــه المعدل الزمنى لانتقال الشحنة خلال مقطع معين من موصل . ويمكن التعبير عن ذلـــك بالصورة الرياضية

$$i_{(t)} = \frac{dq_{(t)}}{dt} \qquad (1.2)$$

أيضا فان الشحنة

$$q_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} i_{(\tau)} \, dt \qquad (1.3)$$

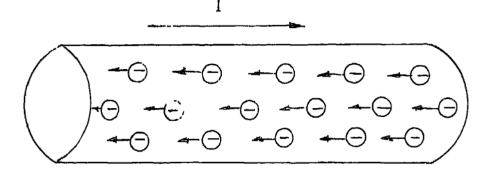
أو

$$= q_0 + \int_{0}^{t} i_{(\tau)} \, d\tau \qquad (1.4)$$

حيث q_o هى قيمة الشحنة عند اللحظة الزمنية $t = 0$

فاذا قيست الشحنة بالكولوم والزمن بالثانية فان وحدة قياس التيار تكون هـــــى الأمبير Ampere. وبناء عليه فان الأمبير الواحد يعادل مرور شحنة مقدارها كولـــــوم واحد خلال مقطع معين فى زمن مقداره ثانية واحدة و هو ما يعادل مرور 6.242×10^{18} الكترون خلال المقطع فى الثانية.

وبالرغم من أن الشحنات الحرة ألتى تحمل التيـــار فى أغلـــب الحـــالات هـــى الالكترونات السالبة الشحنة الا أنه قد تم تعريف اتجاه التيار بأنه اتجاه سريان الشـحنات الموجبة . وبناء على هذا التعريف فان اتجاه سريان التيار فى الموصلات هو عكس اتجــــاه مرور الالكترونات الحرة كما هو موضح فى شكل (١-١).



شكل (١-١)

و فى النظام العالمى للوحدات SI يعرف الأمبير بأنه التيار الثابت الذى اذا مر فى موصلين متوازيين لانهائيين موضوعين على مسافة متر واحد من بعضهما فى الفراغ يحدث قوة بين الموصلين مقدارها 2×10^{-7} نيوتن لكل متر من طول الموصلين.

و عادة يرمز للتيار الثابت مع الزمن بالرمز I كما يرمز للتيار المتغير مع الزمن بالرمز $i_{(t)}$.

Example(1-3)
What is the current from a steady flow of 100 C through a wire cross section in 20 seconds ?

الحـــل

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$= \frac{100\ (C)}{20\ (s)} = 5\ A$$

Example (1-4)
What is the charge which has entered an element from a steady flow of current 2 A for 100 μs ?

الحـــل

$$Q = It$$

$$= 2 * 100 * 10^{-6}$$

$$= 200\ \mu C$$

Example (1-5)
Find the current flowing in a conductor when the charge which has entered the conductor is given by $q_{(t)} = 12t$ C.

الحـــل

$$i = \frac{dq_{(t)}}{dt}$$

$$= \frac{d\ 12t}{dt}$$

$$= 12\ A$$

Example (1-6)
The total charge $q_{(t)}$ in coulombs which has entered the terminal of a conductor is given by

$$q_{(t)} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 2 \\ 3 + e^{-2(t-2)} & t > 2 \end{cases}$$

Find the current $i_{(t)}$ and sketch it's variation with time

الحـــــل

$$i_{(t)} = \frac{dq}{dt}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 & 0 \leq t \leq 2 \\ -2\,e^{-2(t-2)} & t > 2 \end{cases}$$

The variation of the current i with time is shown in fig. (1-2)

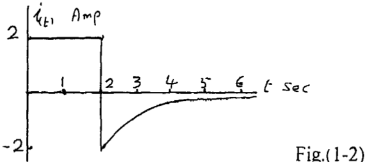


Fig.(1-2)

Example (1-7)

The charge $q_{(t)}$ C present in a two terminal element is defined by the wave shape shown in Fig. (1-3) Find the wave shape of the current flowing in the element

Fig. (1-3)

الحـــــل

$$i_{(t)} = \frac{dq_{(t)}}{dt}$$

العلاقة بين التيار و الشحنة هى العلاقة التفاضلية

و بتطبيق هذه العلاقة على التغير فى الشحنة فى شكل (١-٣) نجد أن :

١- فى الفترة الزمنية من صفر الى ١ ثانية تزداد الشحنة خطيا بمعدل ثابت مقداره

كولوم واحد كل ثانية. فيكون التيار فى هذه الفترة ثابتا عند القيمة 1 A

٢- فى الفترة الزمنية من ١ الى ٣ ثانية تكون الشحنة ثابتة القيمة أى لا تتغير قيمة الشحنة داخل العنصر ويكون التيار مساويا للصفر .

٣- فى الفترة الزمنية من ٣ الى ٤ ثانية تتناقص الشحنة خطيا بمعدل ثابت مقداره كولوم واحد كل ثانية فيكون التيار فى هذه الفترة ثابتا عند قيمة سالبة هى - 1 A

ويكون تغير التيار مع الزمن كما هو موضح بشكل (١-٤).

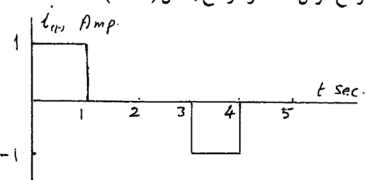


Fig.(1-4)

نفس هذه النتيجة يمكن الحصول عليها فى صورة رياضية اذا عبرنا عن العلاقة بين الشحنة والزمن فى صورة دالة كالآتى :

$$q_{(t)} = \begin{cases} t & C \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & C \quad 1 \leq t \leq 3 \\ 4 - t & C \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

و باجراء عملية التفاضل على هذه الدالة نحصل على الدالة الزمنية للتيار كالآتى .

$$i_{(t)} = \begin{cases} 1 \ A & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \ A & 1 \leq t \leq 3 \\ -1 \ A & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

١ -٣ الطاقة الكهربية Electric Energy

تعرف الطاقة بأنها المقدرة على بذل الشغل. وعندما يبذل جسما ما شغلا Work فان ذلك يكون على حساب الطاقة التى يختزنها الجسم وذلك طبقا للمبدأ المعروف بأن الطاقة **لا تفنى ولا تستحدث** أوقانون بقاء الطاقة

Law of conservation of energy

والطاقة الكهربية هى احدى صور الطاقة المختلفة ولكنها لا توجد علـــى صــورة مستقلة فى الطبيعة . ويسهل الحصول عليها من تحويل الصور الأخرى للطاقة ومن أمثلـــة ذلك:

١-٣-١ التحويل الكهروميكانيكى للطاقة

Electromechanical Energy Conversion

حيث تحول المولدات الـــدوارة Rotating generators طاقـــة الحركـــة الى طاقة كهربية.

وفى العادة تكون الطاقـــة الميكانيكيـــة محولـــة مـــن صـــورة أخـــرى مثـــل الطاقـــة الحرارية Thermal energy فى آلآت الاحتراق والتوربينـــات و الطاقـــة المائيـــة **Hydraulic** energy فى التوربينات المائية أو طاقة الرياح **Wind energy**.

١-٣-٢ التحويـــل الكـــهروكيميائى للطاقـــة

Electrochemical Energy Coversion

وهى التحويلات التى تتم أثناء التفاعلات الكيميائية ومن أمثلة ذلك البطاريات Electric batteries وخلايا الوقد Fuel cells .

١-٣-٣ التحـــويل الكهروضـــوئى للطاقـــة

Photovoltiac Energy Conversion

حيث تتحول الطاقة الضوئية خلال الخلايا الكهروضوئيـــة Photoelectric cells مباشرة الى طاقة كهربية.

وفى النظام العالمى للوحدات SI يستخدم الجول Joule كوحدة لقيـــاس كمية الشغل والطاقة.

١-٤ فرق الجـــهد **Potential Difference**

يعرف فرق الجهد بين **نقطتين** a و b بأنه كمية الشغل بالجول اللازمة لتحريك

كولوم واحد من الشحنة الموجبة من النقطة **b** الى النقطة **a** ويطلق عليه اختصارا كلمة الجهد أو الفلطية **(voltage)**

$$b \xrightarrow{\quad Q \quad} a$$

ويكتب ذلك رياضيا على الصورة

$$V_{ab} = \frac{W \ (Joul)}{Q \ (Coulomb)} \qquad (1\text{-}5)$$

أو على الصورة التفاضلية

$$V_{ab} = \frac{dW}{dq} \qquad (1\text{-}6)$$

ووحدة قياس فرق الجهد هى الفولت (v) Volt

ويكون الجهد V_{ab} موجبا أو سالبا حسب اشارة كل من الشغل المبذول والشحنة. وتكون اشارة الشغل موجبة اذا كان مبذولاً على الشحنة . فاذا كانت الشحنة موجبة كان فرق الجهد موجبا. أما اذا كانت الشحنة هى التى بذلت الشغل فيكون الشغل سالبا فاذا كانت الشحنة موجبة كان فرق الجهد سالبا.

Example (1-8)

What is the potential difference V_{ab} if a 2 C negative charge does 100 J of work in moving from point b to point a .

الحـــل

$$v = \frac{W}{Q}$$

$$= \frac{-100 \ J}{-2 \ C} = 50 \ \ V$$

أى أن جهد النقطة a أعلى من جهد النقطة b بمقدار 50 V

١–٥ القدرة Power

القدرة هى المعدل الزمنى لبذل الشغل . فاذا كانت شحنة مقدارها d q قد اكتسبت طاقة مقدارها d w فان جهد الشحنة يرتفع بمقدار $\frac{dW}{dq}$. فاذا ضربنا هذه الكمية فى مقدار التيار $\frac{dq}{dt}$ وكذلك فان حاصل الضرب يكون

$$\frac{dW}{dq} * \frac{dq}{dt} = \frac{dW}{dt} = P$$

حيث P هى القدرة الكهربية . ووحدة القياس المستخدمة لها هى الوات Watt.

معنى ذلك أن القدرة الكهربية المولدة أو المستهلكة فى أى عنصر تقدر بحاصل ضرب التيار المار بالعنصر فى فرق الجهد بين طرفيه. أى أن

$$p = V_{(t)}\, i_{(t)} \qquad (1\text{-}7)$$

وتكون الطاقة المختزنة فى العنصر عند أى لحظة زمنية t هى

$$W = \int_{-\infty}^{t} P_{(t)}\, dt . \qquad (1\text{-}8)$$

أو

$$W = \int_{-\infty}^{t_0} P_{(t)}\, dt + \int_{t_0}^{t} P_{(t)}\, dt .$$

$$= W_{t0} + \int_{t_0}^{t} P_{(t)}\, dt . \qquad (1\text{-}9)$$

كما أن التغير فى الطاقة الذى يحدث فى فترة زمنية من t_1 الى t_2 هو

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} P_{(t)}\, d(t) . \qquad (1\text{-}10)$$

Example (1-9)

A battery is delivering power to an automobile starter when the current is $= 10\, e^{-t}$ A and the voltage is $V_t = 12\, e^{-t}$ V. Find the power supplied by the source and the energy delivered to the starter.

الحل

$$P_{(t)} = v_{(t)}\, i_{(t)} = 120\, e^{-2t} \text{ watt.}$$

$$W = \int_{0}^{\infty} 120\, e^{-2t}\, dt = 60 \text{ Joul.}$$

الاتجـــــاهات المرجـــعية Reference Directions

تعرضنا فى الأجزاء السابقة لتعريف المتغيرات الأساسية التى سوف نتعامل معها فى دراستنا للدوائر الكهربية . وفى الغالب فان ما نحتاج أن نعرفه ليس فقط مقدار المتغير ولكن أيضا اتجاهه أو القطبية الخاصة به. وهذا يتطلب فرض مقدار المتغير و كذلك الاتجاه المرجعـــى Reference direction أو القطبية المرجعية Reference polarity له.

١-٦-١ القطبية المرجعية للشحنة Reference polarity for charge

اذا اعتبرنا موصلين منفصلين عن بعضهما وبينهما مادة عازلة فانه يمكـــن افـــتراض قطبية مرجعية للشحنة باعتبار أحد الموصلين موجب الشحنة والآخر ســـالب الشـــحنة .وهذا الفرض لا يؤثر على حقيقة الوضع للموصلين من حيث وجود أو غياب الشحنات. ولكنه فقط وسيلة لتحديد كمية ونوعية الشحنة $q_{(t)}$ الموجودة على كل موصل.

فاذا اتفق الوضع الحقيقى مع الوضع المفـــــترض كانت $q_{(t)}$ موجبة كما فى شكــــل (١-٦-١) واذا كان الوضع الحقيقى مخالفا للاتجاه المرجـــعى المفترض كما فى شكــل (١-٦-ب) تكـــون $q_{(t)}$ سالبة.

$(-)\ -\ q_{(t)}\ +\ (+)$

(أ)

$(+)\ -\ q_{(t)}\ +\ (-)$

(ب)

شكل (١-٦)

١-٦-٢ الاتجاه المرجعى للتيار Reference Direction For current

عند مرور تيار فى موصل فان المتغير $i_{(t)}$ يكون ممثلا لقيمة التيـــار المـــار . ولتحديد اتجاه مرور التيار يلزم أن نفرض اتجاها مرجعيا نشير اليه بسهم كما فى شــــكل (١-٧).

$\longrightarrow\ i_{(t)}$

Fig. (1-7)

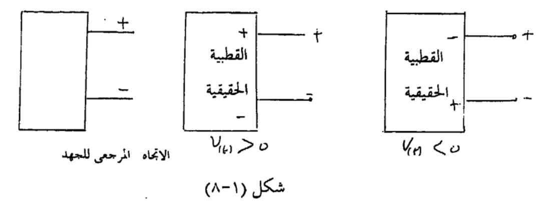
وعند تحليل الدائرة التى تحتوى على الموصل اذا تبين أن الاتجاه الحقيقى للتيار المار فى الموصل مطابق للاتجاه المرجعى المفترض يكون التيار موجبا

أيضا عند أى لحظة زمنية أخرى اذا كان اتجاه سريان التيار الحقيقى معاكسا للاتجاه المفترض فان اتجاه $i_{(t)}$ يكون ســـالبا.

١-٦-٣ القطبية المرجعية لفرق الجهد

Reference Polarity For Potential Difference

اذا نظرنا الى أى نقطتين فى دائرة كهربية , فاننا نعرف المتغير بأنه فـــرق الجهد بين النقطتين . وذلك بفرض احداهما موجبة والاخرى سالبة. وبعد تحليل الدائـــرة اذا اتفق فرق الجهد الحقيقى بين النقطتين مع القطبية المفترضـــة كـــان فـــرق الجـــهد موجبا واذا اختلفت القطبية كان سالبا كما هو موضح فى شكل (١-٨)



شكل (١-٨)

١-٦-٤ الاتجاهات المرجعية للعناصر ذات الطرفين

كثير من العناصر التى تتكون منـــها الدوائـــر الكهربيـــة تكـــون ذات طرفـــين Two terminal devices . ومن أمثلة تلك العنـــاصر المقاومـــات Resistors والحاثات Inductors والمكثفـــات Capacitors والبطاريـــات Batteries والمولدات Genarators والثنائيات Diodes.....الخ. وعادة ما تكون هناك علاقة بين التيار المار بالعنصر وفرق الجهد بين طرفيه . وتتحدد هذه العلاقة حسب طبيعـــة كـــل عنصر. وفى مثل هذه العناصر يجب مراعاة أن تكون الاتجاهات المرجعية للجهد والتيـــار بحيث تحقق العلاقة بينهما.فمثلا فى حالة المقاومة الموضحة فى شكل (١-٩) تكون العلاقة

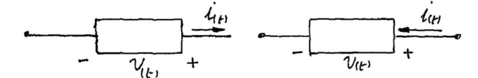
بين الجهد والتيار على الصورة

FIG. (1-9)

وعند فرض القطبية المرجعية للجهد جعلت الاشارة الموجبة عند طرف دخول التيار. وهذا الوضع هو ما يكون عليه الواقع فى المقاومات.

١-٦-٥ ألاشارة المرجعية للقدرة

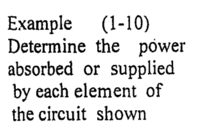
حيث أن القدرة دالة فى متغيرين هما الجهد والتيار فانه من الواجب أن نحـــدد الاتجاه المرجعى لكل من الجهد والتيار عند تحديد اشارة القدرة. وفى كل عنصر تتحـــدد اشارة التيار باتجاه السهم وتتحدد اشارة الجهد بالعلامتين + و - كما فى شكل (١-١٠)



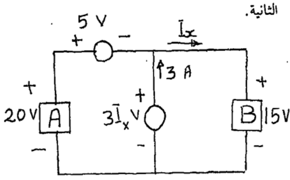
عنصر مـــولد للطاقة   عنصر مســـتهلك للطاقة

شكل(١-١٠)

ويعتبر العنصر مولدا للطاقة اذا كان التيار خارجا من الطرف الموجـــب كمـــا فى الشكل ا . كما يعتبر العنصر مستهلكا للطاقة اذا كان التيار داخلا للطرف الموجب كما فى الشكل (ب). وفى الحالة الأولى تكون القدرة ســـالبة بينما تكون موجبة فى الحالـة الثانية.



Example (1-10)
Determine the power absorbed or supplied by each element of the circuit shown



الحــــل

العنصر A

قيمة التيار 2 A مغادرا العنصر عند الطرف الموجب لفرق الجهد وهـــذا يعـــنى أن العنصر يمتص قدرة سالبة أى يعطى قدرة مقدارها

$$p = 20 * 2 = 40 \quad W$$

العنصر B

قيمة التيار $I_x = 5$ A داخلا العنصر عند الطرف الموجب لفرق الجهد و قيمة فـرق الجهد $3I_x = 15$ V وهذا يعنى أن العنصر يمتص قدرة مقدارها

$$p = 15 * 5 = 75 \quad W$$

مصدر الجهد 5 v به تيار 2 A داخلا من الطرف الموجب وهذا يعنى أن العنصر يمتص قدرة مقدارها $p = 5 * 2 = 10$ watt

أما مصدر الجهد $3I_x$ فيكون جهده 15 v وبه تيار 3 A داخلا من الطرف السالب وهذا يعنى أن العنصر يعطى قدرة مقدارها $p = 15 * 3 = 15$ watt

ويجب هنا أن نلاحظ أن مجموع القدرة التى تعطيها العناصر المولدة يكون مساويا لمجموع القدرة التى تأخذها العناصر المستهلكة

١-٧ الدائرة الكهربية Electric Circuit

تعرف الدائرة الكهربية بأنها اتصال مجموعة أو أكثر مـــن العنـــاصر والمصـــادر Sources وتصنف الدوائر حسب العناصر المكونة لها. ويمكن تصنيف العناصر المكونـة للدوائر الكهربية كالآتى.

١-٧-١ عناصر خطية وعناصر لاخطية Linear And Nonlinear Elements

العنصر الخطى هو الذى يحكم العلاقة بين التيار والجهد على طرفيه معادلة تفاضليـة خطية.بمعنى أنه اذا كان التيار i هو دالة الدخول للعنصر والجهد v هو اسـتجابة العنصر لمرور التيار فاذا كان العنصر خطيا فان تيارا قيمته i_1 يعطى جهدا قيمتـــه v_1

وكذلك فان تيارا قيمته i_2 يعطى جهدا قيمته v_2 فاذا مر تيار $i = i_1 + i_2$

فان الجهد الناتج هو $v = v_1 + v_2$

أما اذا لم يتحقق الشرط السابق فاننا نقول أن العنصر لاخطى Nonlinear.

Example (1-11)

An element has a v-i relation $V = \frac{di}{dt}$ Is the element linear or nonlinear

الحل

عند مرور تيار i_1 يكون الجهد $V_1 = \frac{di_1}{dt}$

وعند مرور تيار i_2 يكون الجهد $V_2 = \frac{di_2}{dt}$

فاذا مر تيار $i = i_1 + i_2$ فان الجهد الناتج يكون

$$V = \frac{d}{dt}(i_1 + i_2)$$
$$= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = v_1 + v_2$$

ومن ذلك نرى أن العنصر يكون خطيــــا.

Example (1-12)

An element has a v-i relation $v = i^2$ Is the element linear or nonlinear ?

الحل

عند مرور تيار i_1 يكون الجهد $v_1 = i_1^2$

و عند مرور تيار i_2 يكون الجهد $V_2 = i_2^2$

فإذا مر تيار $i = i_1 + i_2$ فإن الجهد الناتج

$$v = (i_1 + i_2)^2$$
$$\neq i_1^2 + i_2^2$$

ومن ذلك نرى أن العنصر يكون لا خطيــــا.

و يمكن القول أنه لا وجود للعناصر الخطية فى الحيـــاة العملية. الا أنه يمكن تمثيـــل العناصر بنماذج خطية فى مدى معين للمتغيرات. و هذه النماذج تسمح باستخدام طـرق

التحليل الخطية لأغلب العناصر . و هدا ما سوف نتبعه فى هذه الدراسة حيث أننا سوف نعتبر أن جميع العناصر خطية ما لم يكن هناك نص على خلاف ذلك..

١-٧-٢ العناصر المتغيرة والعناصر الثابتة مع الزمن.

Time Varing And Time Invarying Elements

اذا كانت قيمة العنصر غير مستقرة فهو عنصر متغير مع الزمن Time varying.ولا توجد فى الحياة العملية عناصر ثابتة لا تتأثر بمرور الزمن. الا أنه فى حالة التغير البطئ يمكن اعتبار العنصر ثابت القيمة خلال الفترة الزمنية المعنية بالتحليل.

١-٧-٣ العناصر الفعالة و العناصر الخاملة

Active And Passive Elements

يتم تصنيف العناصر فى الدوائر الكهربية الى عناصر فعالة وعناصر خاملة على أساس الطاقة الداخلة للعنصر. فاذا كانت الطاقة الداخلة موجبة أو مساوية للصفر يصنف العنصر على أنه خامل Passive .

وفى حالة الطاقة الموجبة يكون العنصر مستهلكا للطاقة Lossy أما عندما تكون الطاقة مساوية للصفر فان العنصر يكون غير مستهلك للطاقة Lossless أو خازنا لها Storage element لحين استرجاعها منه.

أما اذا كانت الطاقة الكلية الداخلة للعنصر سالبة فان العنصر يكون فعالا Active أو مولدا للطاقة Generating Element.

١-٧-٤ العناصر المجمعة والعناصر الموزعة

Lumped And Distributed Elements

لا شك أن سريان التيار فى العناصر يستغرق بعض الوقت.وعلى ذلك فلا بد من أخذ أبعاد العناصر فى الاعتبار عند تحليل الدوائر الكهربية. واذا كانت أبعاد عناصر الدائرة

أصغر بكثير من طول موجة التيار المار يمكن اهمال أبعاد العناصر واعتبارها عناصر مجمعة Lumped elements.

فاذا كان خلاف ذلك تعامل الدائرة على أنها موزعة Distributed circuit.

وفى هذه الدراسة سوف يكون اهتمامنا موجها الى دراسة الدوائر ذات العناصر الخطية المجمعة والثابتة مع الزمن

Linear , Lumped , and Time invarient

١-٨ تمارين

1-1 A wire carries a constant current of 10 mA . How many coulombs and how many electrons pass a cross section of the wire in 20 seconds

1-2Find an expression of the total charge q Which has passed a point in a conductor if the current is given by $i_{(t)} = 4\,e^{-4t}$ for $t>0$

1-3 The charge entering the terminals of a device is given by $q_{(t)} = 2 + k_1 t + k_2 t^2$. If $i_0 = 4$ A and $i_{(3)} = -4$ A Find k_1 and k_2.

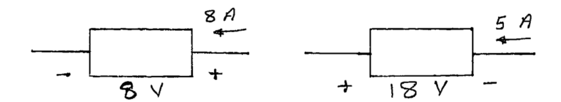
1-4 The current in a wire is given by $i_{(t)} = 2\sin 2t$ for $t > 0$ and $i_{(t)} = 0$ for $t < 0$ (a) find the total charge passing a cross section of the wire between $t=0$ and $t= 0.5$ sec. (b) if the same current enters the positive terminal of an element whose voltage is given by $V_{(t)} = \int_0^t i\, d\tau$ find an expression for the power delivered to the element

1-5 The current flowing in an element is given by

$$i_{(t)} = \begin{cases} 2-\frac{t}{2} & A \quad 0 < t < 1 \\ 2 & A \quad -3 < t < 0 \\ \frac{1}{2} & A \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

Sketch the variation of the current $i_{(t)}$ versus time and determine the charge entering the element in the time period from t =0 to t= 4 sec.

1-6 Calculate the power delivered or supplied by each element



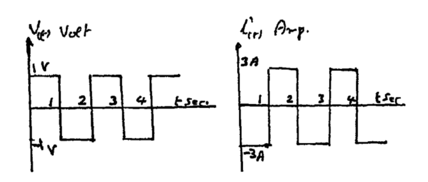
1-7 A voltage $v_{(t)} = 10 \sin t$ V and a current $i_{(t)} = \sin t$ A are variables of a two terminal element . (a) Find an expression for the power dissipated in the element . (b) Find the total energy supplied to the element over the time range 0< t < 0.2 sec. (c) Sketch the variation of voltage , current , power , and energy with time (d) Repeat (a) , (b) and (c) for the case where the current is $i_{(t)} = 5 \cos t \cdot$ A

1-8 A small alkaline battery has a stored energy of 150 jouls. For how many days will it power a calculator that draws 2 mA . The emf of the battery is 1.5 volts.

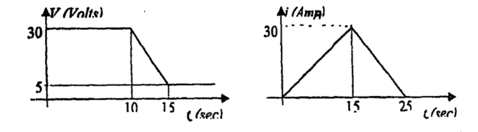
1-9 A cassette player uses 4 AA batteries in series to provide 6 volts to the player circuit. Each cell stores 50 watt . seconds of energy . If the cassette player is drawing a constant current of 10 mA from the batteries . How long will the cassette operate?

1-10 An element has a current $i_{(t)} = 50\, e^{-50t}$ mA entering the positive terminal of an element with a voltage $v_{(t)} = 10 - 20 e^{-50t}$ V for t >0. How much power is absorbed by the element at t = 10 ms .
And how much energy is absorbed in the time interval $0 < t < \infty$.

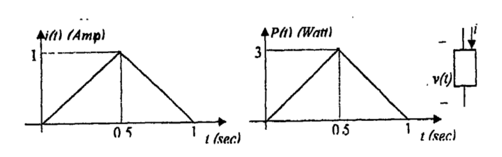
1-11 Wave shapes of the voltage and current defined as shown in fig. are measured at the terminals of an element . Draw the wave shapes for the power $P_{(t)}$ and energy $W_{(t)}$.



1-12 The current through and the voltage across an element vary with time as shown. Sketch the variation of the power supplied to the element for t>0 . What is the total energy delivered to the element between t = 0 and t = 25 sec.



1-13 The power and current in an element vary with time as shown. Determine the voltage and energy variation with time.



الفصـــــــل الثاني

عناصر الدوائر الكهربية

ELECTRIC CIRCUIT ELEMENTS

لدراسة خصائص وتصرفات النظم الكهربية يلزم أولا تمثيلها بدوائر يمكن رسمـــها على الورق . هذه الدوائر تتكون من عناصر حيث يرمز إلى كل عنصر برمز خاص بـــه بالإضافة إلى نموذج رياضي يعبر عن العلاقة بين التيار والجهد على أطراف العنصر عنـــد جميع اللحظات الزمنية . وفيما يلي سوف نستعرض العناصر المختلفة التي تتكون منـــها الدوائر الكهربية

٢-١ العناصر الخاملة PASSIVE ELEMENTS

عندما تتصل دائرة كهربية بمصدر للطاقة، فإن الطاقة المولدة من المصـــدر إمـــا أن تستهلك أو تخزن في عناصر الدائرة . واستهلاك الطاقة يعني تحويلها إلى صورة أخرى (حرارة) ، وهذا يحدث مع عنصر المقاومة . RESISTANCE أما تخزين الطاقة، فإنـــه يتم إما في المجال الكهربي ELECTRIC FIELD وهـــذا يـــؤدي إلى مفـــهوم الســـعة CAPACITANCE أو في المجال المغناطيسي MAGNETIC FIELD وهذا يـــؤدي إلى مفهوم المحاثة. INDUCTANCE

٢-١-١عنصر المقاومة THE RESISTANCE ELEMENT

عند مرور الإلكترونات (حاملات التيار) في الموصلات تحدث تصادمات بينـــها وبين المكونات الأخرى للذرة . وتؤدي هذه التصادمات إلى فقد في الطاقة التي تحملـــها الإلكترونات. ويترجم هذا الفقد لكل كولوم من شحنة الإلكترونات إلى هبوط في الجهد عبر الموصل. VOLTAGE DROP

وقد اكتشف جورج سيمون أوم (GEORG S. OHM 1787 - 1854) عن طريق التجارب المعملية وجود علاقة تناسب بين شدة التيار I المـــار في الموصـــلات المعدنية وفرق الجهد بين طرفيها V . ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة الرياضية

$$V = I R \qquad (2-1)$$

حيث R هي ثابت التناسب وتعرف بمقاومة العنصر وتقاس بوحدة الأوم (Ω) . وتعتمد مقاومة العنصر على أبعاده وعلى نوع المادة المصنوع منها . حيث

$$R = \frac{\rho L}{A} \qquad (2-2)$$

حيث

ρ . هي المقاومة النوعية للمادة RESISTIVITY و L هو طول الموصل و A هي مساحة مقطعه.

وتعرف العلاقة (١-2) بقانون أوم OHM'S LAW ويكتب أيضا على الصورة

$$I = G \quad V \qquad (2\text{-}3)$$

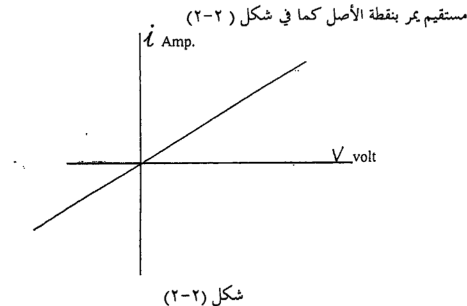
حيث

G هي مقلوب R وتعرف بالتوصيلية CONDUCTANCE وتقـــاس بوحــدة السيمتر . SEIMENS (S)

وعند رسم الدوائر الكهربية ترسم المقاومة كما في شكل (٢-١)

شكل (٢-١)

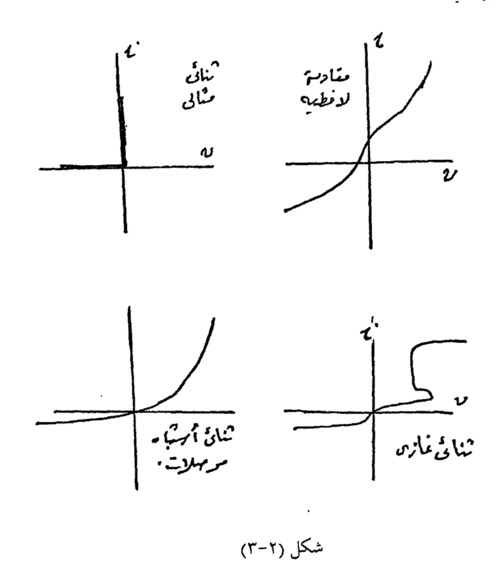
ويمكن توضيح خصائص المقاومة بيانيا برسم العلاقة بين التيار المـــار في المقاومـــة وفرق الجهد بين طرفيها . وتتميز المقاومة الخطية بأن هذه العلاقة تكون على صورة خط مستقيم يمر بنقطة الأصل كما في شكل (٢-٢)



شكل (٢-٢)

والمقاومة الخطية ليس لها وجود فعلي في الواقع العملي حيث تكون المقاومات لا خطية. فمثلا في حالة مرور تيارات ذات قيم عالية تتغير قيمة المقاومة بصورة ملحوظة عن قيمتها عند مرور التيارات ذات القيم المنخفضة فتأخذ العلاقة بين الجهد والتيار صـــورة

غير خطية وقد لا تمر بنقطة الأصل . وشكل (٢-٣) يبين أمثلة لبعض أنواع المقاومـــات اللاخطية



شكل (٢-٣)

بالإضافة إلى اللاخطية NONLINEARITY قد تكون المقاومة ذات قيمة متغـــيرة مع الزمن TIME VARYING يرمز للمقاومة في هذه الحالة بالرمز R (t) وبصفة عامة فعندما نتكلم عن المقاومات كعناصر في الدوائر الكهربية فإننا نعني المقاومة الخطية الثابتة القيمة مع الزمن والمجمعة في نقطة واحدة أي ليس لها أبعاد

LINEAR - TIME INVARIANT AND LUMPED

ما لم يكن هناك نص على خلاف ذلك.

والمقاومات عناصر مبددة للطاقة DISSIPATIVE وتتحدد القدرة المفقـــودة في المقاومة عند أي لحظة زمنية من العلاقة

$$P(t) = V(t)\, i(t) \tag{2-6}$$

وحيث أن $V(t) = i(t)\ R$ حسب قانون أوم فإن القدرة المفقودة يمكـــن كتابتها على إحدى الصور

$$P(t) = [\, i(t)\,]^2\ R \tag{2-7}$$

أو

$$P(t) = [\, V(t)\,]^2 / R \tag{2-8}$$

وتتراوح قيم المقاومات المستخدمة في الدوائر بين عدد قليل من وحدة الأوم وبـــين عدة ملايين من وحدات الأوم ($M\Omega$) وعند استخدام المقاومات في الدوائر العملية لا نكتفي بذكر القيمة فقط ولكن يلزم أيضا معرفة أقصى قدرة يمكن استهلاكها في هذه المقاومة حتى لا ترتفع درجة حرارتها إلى الحد الذي يؤدي إلى تغير خواصها أو احتراقها.

وتتغير قيمة المقاومة تبعا لتغير درجة حرارتها ويمكن التعبير عن التغير بالعلاقة

$$R = R_0 (1 + \alpha t) \tag{2-9}$$

حيث $R0$ هى القيمة الإبتدائية للمقاومة ، t هي الإرتفاع في درجة الحرارة عـــن القيمـــة الإبتدائيـــة، α هـــي المعـــامل الحـــراري للمقاومـــة TEMPERATURE COEFFICIENT وتعتمد قيمة α علـــى درجـــة الحـــرارة الإبتدائية وقد تكون موجبة أو سالبة حسب نوع المادة المصنوع منها المقاومـــة , فـــهى موجبة للمقاومات المعدنية وسالبة في المقاومات الكربونية أو المصنوعة من مـــواد شبـــه موصلة.

توصيل المقاومات على التوالى

SERIES CONNECTION OF RESISTANCES

عند توصيل مقاومتين معا على التوالي فإنهما يكونان معا عنصرا ذا طرفين كما في شكل (٢-٤)

شكل (٢-٤)

حيث نجد أن

$$i = i_1 = i_2 \qquad \& \qquad V = V_1 + V_2$$

أي أن

$$V = i(R_1 + R_2)$$

ومنها نجد أن الفرع AB يحتوي على مقاومة مكافئة

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \qquad (2-10)$$

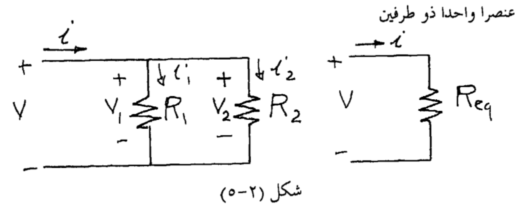
ويمكن تعميم هذه النتيجة لأي عدد من المقاومات متصلة على التوالي حيث تكون المقاومة المكافئة لعدد N مقاومة هي

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + R_N \qquad (2-11)$$

توصيل المقاومات على التوازي

PARALLEL CONNECTION OF RESISTORS

عند توصيل مقاومتين على التوازي كما في شكل (٢- ٥) فإنهما يكونان معا عنصرا واحدا ذو طرفين



شكل (٢-٥)

حيث نجد أن فرق الجهد بين طرفيه

$$V = V_1 = V_2$$

وأن التيار المار به

$$i = i_1 + i_2$$

وحيث أن $i = V\,G$ من قانون أوم فإننا نجد

$$i = (G_1 + G_2)\,V$$

أي أن العنصر المكافئ له مواصلة

$$G = G_1 + G_2 \qquad (2\text{-}11)$$

وبصفة عامة فإنه عند توصيل عدد N من المقاومات على التوازي بين نقطتين فإن المواصلة المكافئة تكون

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 \ldots\ldots\ldots + G_N \qquad (2\text{-}12)$$

وبدلالة المقاومة R فإن

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdots\cdots \frac{1}{R_N} \qquad (2\text{-}13)$$

وفى حالة اتصال مقاومتين فقط على التوازي فان المقاومة المكافئة

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

أو

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (2\text{-}14)$$

Example (2-1)
In the Circuit of
Fig.(2-6)

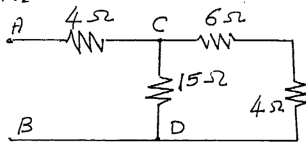


Fig.(2-6)

المقاومة المكافئة بين الطرفين CD

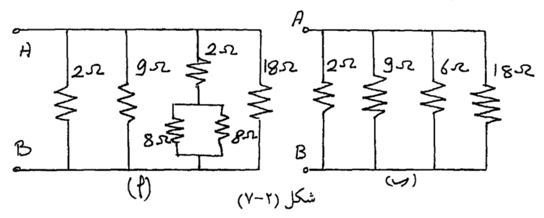
$$R_{eq\,CD} = \frac{15(4+6)}{15+(4+6)} = 6\ \Omega.$$

و المقاومة المكافئة بين الطرفين A , B

$$R_{eq\,AB} = 4 + 6 = 10\ \Omega.$$

Example (2-2)

اذا نظرنا إلى الدائرة المبينة في شكل (٢ – ٧ ا)نجد أنه يمكن تبسيطها إلى الدائرة المبينة في شكل (٢ – ٧ ب)



شكل (٢-٧)

ثم نحصل على المقاومة المكافئة بين الطرفين A , B

$$\frac{1}{R_{eqAB}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

$$R_{eq\,AB} = 1.5\,\Omega .$$

٢-١-٢ المكثفات والسعة

CAPACITORS AND CAPACITANCE

عندما يوجد موصلان يفصل بينهما مادة عازلة فإنه يمكـــن تخزيـــن الشحنـــات الكهربية على سطحي الموصلين وينشأ بينهما مجال كهربي ، ويطلق على هذا الترتيب اسم المكثف CAPACITOR والخاصية الأساسية للمكثف هي قابليته لتخزيـــن الشحنـــات الكهربية حيث تكون الشحنة موجبة على أحد الموصلين وسالبة لها نفس المقـــدار علـــى سطح الموصل الآخر

كما في شكل (٢ – ٨)

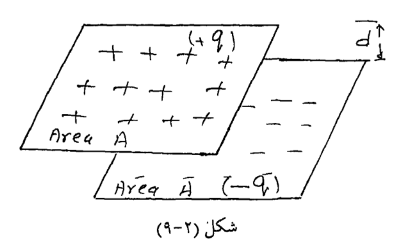
شكل (٢-٨)

وحيث أن المسافة الفاصلة بين الموصلين تحتوي مادة عازلة فلا يوجـــد فرصـــة لاتحاد الشحنتين عن طريق ممر داخلي بينهما وتظل كل منهما مختزنة بكامل قيمتها.

وتتناسب قيمة الشحنة Q مع فرق الجهد بين الموصلين V ويمكن التعبير عن هذه العلاقة رياضيا بالمعادلة

$$q = C V \qquad (2\text{-}15)$$

حيث C مقدار ثابت يعرف بسعة المكثف CAPACITANCE والسعة خاصيـــة للمكثف تعتمد قيمتها على شكل الموصلات ومساحة سطحها ونـــوع المـــادة العازلـــة الموجودة بينها وكذلك المسافة الفاصلة بين الموصلين . فمثلا في حالة مكثف الألـــواح المتوازية PARALLEL PLATE CAPACITOR المبين فى شكل (٢ - ٩)



شكل (٢-٩)

تكون السعة

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \qquad (2\text{-}16)$$

حيث ϵ ثابت العزل DIELECTRIC CONSTANT للمادة العازلة بين الألواح ، A هي مساحة كل لوح ، d هي المسافة الفاصلة بين اللوحين . والوحدة المســـتخدمة لقيـــاس السعة هي الفاراد FARAD ويرمز له عادة بالرمز F

والفاراد قيمة كبيرة جدا ولذلك تقاس سعة المكثفات عمليا بكسور الفاراد مثل الميكرو فاراد (µF) وهو يساوي 10^{-6} F والنـــانو فـــاراد(nF) وهـــو يســـاوي 10^{-9} F والبيكو فاراد (PF) وهو يساوي 10^{-12} F

Example (2-3)

إذا أردنا الحصول على مكثف سعته فارد واحد باستخدام لوحين متوازيين في الهواء وبينما مسافة ١ سم فإنه طبقا للعلاقة (٢- ١٦) نحتاج إلى مساحة

$$A = \frac{1 * (1 * 10^{-2})}{1.0006 * 8.85 * 10^{-12}} = 1.13 * 10^{9} \quad m^2.$$

فاذا استخدمنا مادة عازلة لها ثابت عزل أكبر من الهواء (سيراميك مثلا لـــه $\epsilon_r = 7500$) فإن المساحة المطلوبة تصير

$$A = 151 * 10^{3} \quad m^2.$$

وتظهر المكثفات في الدوائر إما ثابتة السعة أو متغيرة الســـعة ويرمـــز للمكثـــف في الدوائر كما في شكل (٢ - ١٠) .

شكل (٢-١٠)

وحيث أن العلاقة بين الشحنة q وفرق الجهد بين طرفي المكثف V هي العلاقة

$$q = C V$$

فإن التيار المار في المكثف

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dCv}{dt}$$

$$= C\frac{dv}{dt} + v\frac{dc}{dt} \qquad (2\text{-}17)$$

وعندما تكون C ثابتة القيمة وهو الوضع المألوف في الدوائر فإن

$$i = C\frac{dV}{dt} \qquad (2\text{-}18)$$

كما أن فرق الجهد بين طرفي المكثف

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i \, dt \qquad (2\text{-}19)$$

$$v = \frac{1}{C}\left(\int_{-\infty}^{0} i \, dt + \int_{0}^{t} i \, dt\right)$$

$$= \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i \, dt \qquad (2\text{-}20)$$

حيث q_0 هي قيمة الشحنة الإبتدائية على المكثف عند $t = 0$

أيضا فإن شحنة المكثف $q_{(t)}$ عند أي زمن t تكون

$$q_{(t)} = q_0 + \int_0^t i \, dt \qquad (2\text{-}21)$$

Example (2-4)

إذا وصل مكثف متغير السعة بين طرفي بطارية ذات جهد ثابت مقداره V وكانت السعة

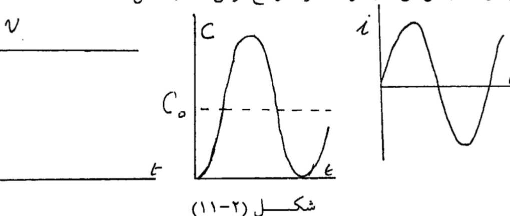
تتغير مع الزمن طبقا للعلاقة $C = C_0 \, (1 - \cos \omega_0 t)$

فان التيار

$$i = \frac{d}{dt} CV$$

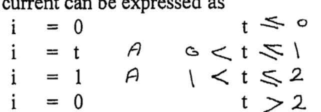
$$= V \frac{dC}{dt} = \omega_0 C_0 V \sin \omega_0 t$$

ويكون تغير كل من الجهد والسعة والتيار مع الزمن كما بالشكل



شكل (٢-١١)

Example (2-5) Find the voltage V of a capacitor C = ½ F when the current in fig. is flowing in it.



The current can be expressed as

$$i = 0 \qquad t \leq 0$$
$$i = t \quad A \qquad 0 < t \leq 1$$
$$i = 1 \quad A \qquad 1 < t \leq 2$$
$$i = 0 \qquad t > 2$$

From eqn. (2-19) $v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i \, dt$ then

$$v = 0 \qquad t < 0$$

$$v = 2\int_{0}^{t} \tau \, d\tau \qquad 0 < t \leq 1$$

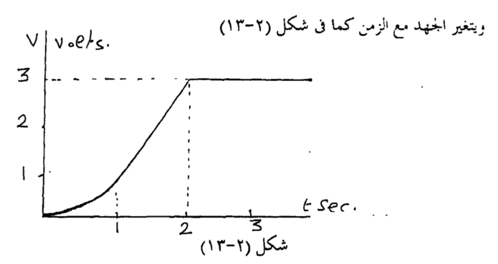
$$= 2\frac{t^2}{2}$$

$$v = v_1 + 2\int_{1}^{t} 1 \, d\tau$$

$$= 1 + 2(t-1) = 2t - 1 \qquad 1 < t \leq 2$$

$$v_{(2)} = 3 \quad v \qquad t > 2$$

ويتغير الجهد مع الزمن كما فى شكل (٢-١٣)



شكل (٢-١٣)

الطاقة المختزنة في المكثف

ENERGY STORED IN A CAPACITOR

المكثفات عناصر خازنة للطاقة وهذه الطاقة لازمة لفصل لوحي المكثف اللذين يحملان شحنتين مختلفتين وتحسب الطاقة المخزنة في المكثف من العلاقة

$$W = \int_{-\infty}^{t} v i \, dt = \int_{-\infty}^{t} vC \frac{dv}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{2} C V^2 \qquad (2\text{-}22)$$

وباستخدام العلاقة $q = c\,v$

فإن الطاقة المختزنة في المكثف بدلالة الشحنة

$$W = \frac{1}{2C}(q)^2 \qquad (2\text{-}23)$$

EXAMPLE (2 -6)

Find the Energy stored in the capacitor of example (2-4) .

At $t = 1.5$ sec. , the voltage across the capacitor is 2 volts , and the stored energy is

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$
$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2} (2)^2 = 1 \quad J$$

وإذا بقيت أطراف المكثف مفتوحة تظل الطاقة المختزنة ثابتة أما إذا وصل طرفي المكثف مع طرفي مقاومة فإننا نتوقع مرور تيار في المقاومة ويستمر مرور التيار حتى تتبدد كل الطاقة المختزنة في صورة حرارة في المقاومة . عندئذ يكون التيار قد وصل إلى قيمة الصفر ويكون الجهد عبر المكثف مساويا للصفر.

توصيل المكثفات على التوالي

SERIES CONNECTION OF CAPACITORS

عند توصيل عدد N من المكثفات على التوالي كما في شكل (٢ - ١٤) يكون التيار المار فيها جميعا هو تيار واحد I ويكون الجهد الكلي هو مجموع الجهود على كل مكثف على حده

شكل (٢-١٤)

$$i = i_1 = i_2 = \dots\dots\dots\dots = i_N$$
$$v = v_1 + v_2 + \qquad + v_N$$
$$= \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i_1 dt + \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i_2 dt - - - \frac{1}{C_N}\int_{-\infty}^{t} i_N dt$$
$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \dots \frac{1}{C_N}\right)\int_{-\infty}^{t} i\, dt$$

$$= \frac{1}{C_{eq}} \int_{-\infty}^{t} i \, dt$$

أي أن

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \cdots\cdots \frac{1}{C_N} \qquad (2\text{-}25)$$

وفي حالة توصيل مكثفين فقط على التوالي فإن السعة المكافئة

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad (2\text{-}26)$$

توصيل المكثفات على التوازى

PARALLEL CONNECTION OF CAPACITORS

عند توصيل عدد N مكثف على التوازي كما في شكل (٢ –١٥) فإن الجهد على كل مكثف يكون هو نفس قيمة الجهد الكلي بينما يكون التيار الكلـــي هــو مجمــوع التيارات في كل مكثف على حده

شكل (٢-١٤)

$$i = i_1 + i_2 + \cdots\cdots + i_N$$

$$= C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} - - - + C_N \frac{dv_N}{dt}$$

$$= [C_1 + C_2 + C_3 - - - + C_n] \frac{dv}{dt}$$

$$= C_{eq} \frac{dv}{dt} \qquad (2\text{-}27)$$

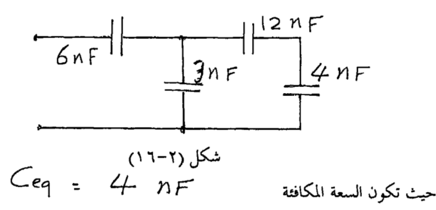
حيـــث

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 - - - + C_N \qquad (2\text{-}28)$$

أي أن السعة المكافئة لمجموعة من المكثفات المتصلة على التـــوازي تســـاوي مجمـــوع السعات لكل مكثف على حده

Example 2-7

مجموعة المكثفات المتصلة فى شكل(٢-١٦) يمكن اختصارها الى مكثف واحدمكافئ.

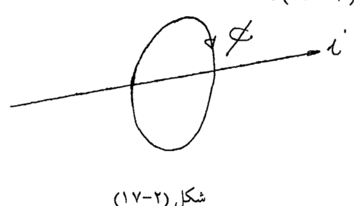


شكل (٢-١٦)

حيث تكون السعة المكافئة $C_{eq} = 4\ nF$

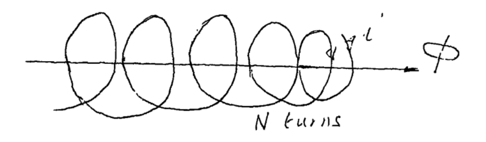
٢-١-٣ ملفات الحث والمحاثة INDUCTORS AND INDUCTANCE

عند مرور تيار كهربي في موصل ينشأ مجال مغناطيسي له فيضي (FLUX) قيمتـــه وبر (WEBER) ويلتف المجال حول التيار ويعتمد اتجاهه على اتجاه مرور التيار كمـــا في شكل (٢ - ١٧).



شكل (٢-١٧)

فإذا كان الموصل على هيئة ملف ملف عدد لفاته N فإن إلتفاف المجال حول التيار FLUX LINKAGE



شكل (٢-١٨)

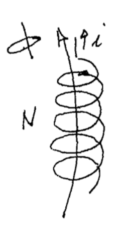
$$\psi = N\phi \quad \text{WB. TURN}$$

فإذا كان التيار متغيرا كان المجال متغيرا . وطبقـــا لقـــانون فـــاراداي (FARADAY'S LAW) فإن المجال المتغير يولد في الملف قوة دافعة كهربية مستحثة

$$v = -\frac{d}{dt}\psi = -N\frac{d\phi}{dt} \quad \text{volt} \qquad (2\text{-}27)$$

وفي النظم الخطية تتناسب ψ مع التيار المنشيئ لها ويعرف ثابت التناسب بمعامل الحث أو المحاثة INDUCTANCE

إذا كان التيار i و ψ ينتميان لنفس المنظومة أو بمعـــنى آخـــر إذا كانت ψ ناشئة عن نفس التيـــار i عـــرف معـــامل الحـــث بأنـــه ذاتي COEFFICIENT OF SELF INDUCTANCE أو بتعبير مبسط ، المحاثة الذاتيـــة SELF INDUCTANCE ويرمز لها بالرمز L



+ i v − L

شكل (٢-١٩)

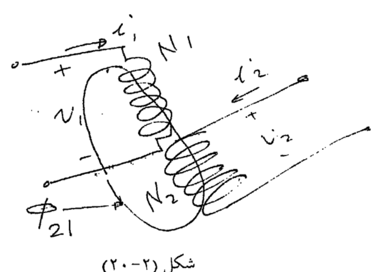
وتكون العلاقة بين الفيض ϕ والتيار i

$$\psi = N\phi = Li \qquad (2\text{-}28)$$

كما تكون العلاقة بين الجهد v والتيار i

$$v = \frac{d\psi}{dt} = N\frac{d\phi}{dt} = L\frac{di}{dt} \qquad (2\text{-}29)$$

أما إذا كان التيار i، ψ لا ينتميان لنفس المنظومة أي إذا كان التيار i_1 ينتج عنه إلتفافا للفيض ψ_2 في دائرة أخرى غير التي يمر بها i_1 كما في شكل (٢- ٢٠)



شكل (٢-٢٠)

فإن معامل الحث يعرف بأنه متبادل COEFFICIENT OF MUTUAL INDUCTANCE أو الحث المتبادل MUTUAL INDUCTANCE ويرمز له عادة بالرمز M

وتكون العلاقة بين التيار i_1 والفيض ϕ_{21} هي

$$\psi_{21} = N_2\phi_{21} = M_{21}\, i_1 \qquad (2\text{-}30)$$

وتكون القوة الدافعة المستحثة في الدائرة (٢) نتيجة لمرور التيار في الدائرة (١)

$$v_2 = \frac{d\psi_{21}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt} \qquad (2\text{-}30)$$

وبنفس الصريقة فإن التيار i_2 يولد جهدا مستحثا في الدائرة (١)

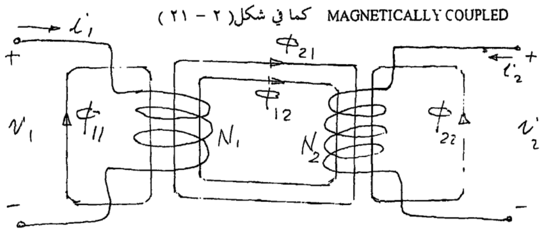
$$v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

وفي العادة فإن

$$M_{12} = M_{21} = M$$

وتعرف M بالحث المتبادل MUTUAL INDUCTANCE ,

والوحدة التي يقاس بها معامل الحث هي الهنري (H) سواء كان الحث الذاتي L أو الحث المتبادل M وتستخدم المللي هنري (mH) والميكرو هنري (μH) كوحـــدات عمليـــة وبصفة عامة إذا كانت هناك دائرتـــين مـــترابطتين عـــن طريـــق المجـــال المغناطيســـي MAGNETICALLY COUPLED كما في شكل(٢ - ٢١)



شكل(٢-٢١)

فانه يمكن أن نتصور أن الفيض الملتف حول تيار الدائرة الأولى يتكون من مركبتين ϕ_{11} نتيجة للتيار i_1 ، ϕ_{12} نتيجة لمرور التيار i_2 وكذلك الفيض الملتف حول الدائرة الثانية يتكون من مركبتين ϕ_{22} الناتجة عن التيار i_2 ، ϕ_{21} الناتجة عن التيار i_1

أي أن المجالات (FLUX)

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$

ويكون إلتفاف الفيض FLUX LINKAGE

$$\psi_1 = N_1\phi_{11} + N_1\phi_{12} = L_1 i_1 - M_{12} i_2$$

$$\psi_2 = N_2\phi_{21} + N_2\phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

وطبقا لقانون فاراداي فإن

$$v_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} .$$

وفي العادة فإن مسار الفيض ϕ_{21} هو نفسه مسار ϕ_{12} وهذا يؤدي إلى أن

M12 = M 21 = M

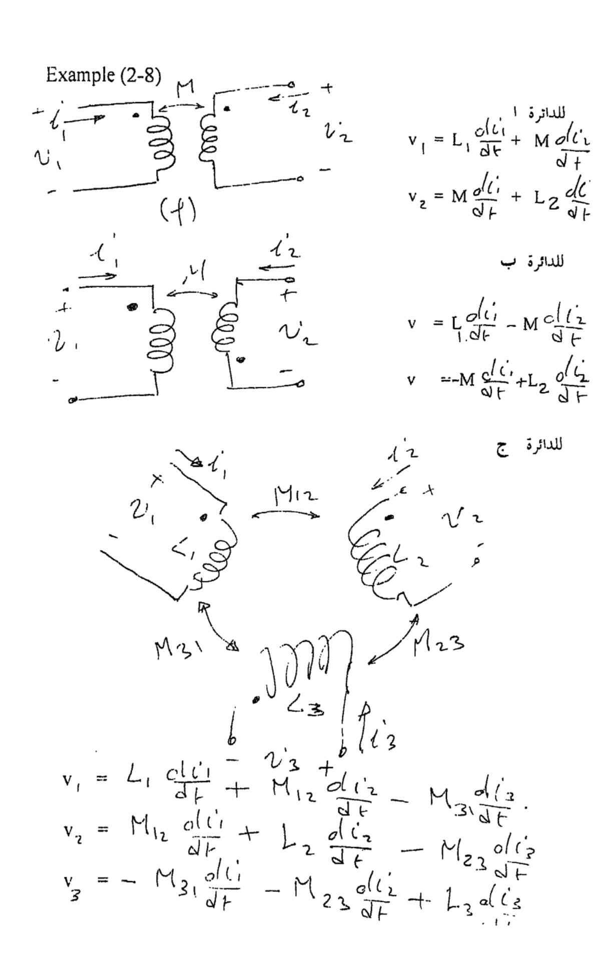
مما سبق نجد أنه للدوائر المترابطة مغناطيسيا

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} .$$
$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} . \qquad (2\text{-}33)$$

أيضا مركبات الفيض ϕ_{21} و ϕ_{12} من الممكن أن يكونا فى اتجاه مماثل أو فى اتجاه مضاد للمركبتين ϕ_{22} و ϕ_{11} و هذا يؤدى الى أن تكون اشارة M موجبة أو سالبة. وهذا يعتمد على اتجاه سريان التيارات i_1 و i_2 وكذلك اتجاه لف كل من الملفين N_1 و N_2 بالنسبة لبعضهما.

وفي نظرية الدوائر الكهربية توضع نقطة اصطلاحية عند طرف كل ملف (DOT CONVENTION) لتحديد الإتجاهات النسبية لمرور التيار.

فإذا كان التياران i_1 ، i_2 يسريان في اتجاه واحد بالنسبة للنقطة (كلاهما داخلان أو كلاهما خارجان) تكون اشارة M موجبة . وهذا يعني أن مركبة الجهد المستحث الناتجة عن التيار i_1 في نفس اتجاه مركبة الجهد المستحث الناتجة عن التيار i_2 ويضافان إلى بعضهما كما أن تغيير اتجاه أحد التيارين عن الوضع السابق يؤدي إلى جعل اشارة M سالبة .


Example (2-8)
M
i1
i2
v1
v2
(أ)
للدائرة ا
v1 = L1 di1/dt + M di2/dt
v2 = M di1/dt + L2 di2/dt
للدائرة ب
v = L1 di1/dt - M di2/dt
v = -M di1/dt + L2 di2/dt
للدائرة ج
M12
M31
M23
L1
L2
L3
i3
v3
v1 = L1 di1/dt + M12 di2/dt - M31 di3/dt
v2 = M12 di1/dt + L2 di2/dt - M23 di3/dt
v3 = - M31 di1/dt - M23 di2/dt + L3 di3

٢- توصيل ملفات الحث

عند توصيل ملفات الحث على التوالي أو على التوازي يختلف الأمر إذا كان بينها حث متبادل أو لم يكن هناك حث متبادل.

أولا : توصيل الملفات إذا لم يكن بينها حث متبادل

(أ) التوصيل على التوالى **SERIES CON NECTION**

إذا وصلنا عدد N محاثة على التوالي وأردنا الحصول على محاثة واحدة فإننا نلاحظ أن التيار واحد في جميع العناصر وأن الجهد V هو مجموع جهود كل العناصر

$$V = V_1 + V_2 + \cdots V_N$$
$$= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \cdots + L_N \frac{di}{dt}$$
$$= [L_1 + L_2 + \cdots L_N] \frac{di}{dt}$$
$$= L_{eq} \frac{di}{dt}$$

ومن هنا نرى أن المحاثة المكافئة

$$L_{eq} = (L_1 + L_2 + \cdots L_N)$$

أي أن المحاثة المكافئة لمجموعة من المحاثات المتصلة على التوالي تكون مساوية لمجموع قيـــم هذه المحاثات.

(ب)التوصيل على التوازى **PARALLEL CONNECTION**

عند توصيل عدد N محاثة على التوازي فإن

$$i = i_1 + i_2 \cdots + i_N$$

$$V = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$= L_{eq}\left[\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \cdots \frac{di_N}{dt}\right]$$

$$= L_{eq}\left[\frac{V_1}{L_1} + \frac{V_2}{L_2} \cdots \frac{V_N}{L_N}\right]$$

$$= L_{eq} V \left[1/L_1 + \frac{1}{L_2} \cdots \frac{1}{L_N}\right]$$

$$\therefore L_{eq} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \cdots \frac{1}{L_N}.$$

وفي حالة توصيل محاثتين على التوالي فإن

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$\therefore L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Example (2-9)

6H, 20H, 30H, 30H, 30H, 60H

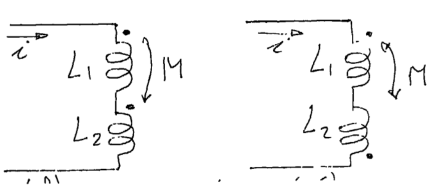
المحاثة المكافئة

$$L_{eq} = 15 \text{ H}$$

ثانيا : توصيل الملفات إذا كان بينهما حث متبادل

(أ) توصيل ملفين على التوالي

شكل ٢ – ٢٦ يبين طريقتين لتوصيل ملفي حث بينهما حث متبادل على التوالي



في شكل ٢ – ٢٦ ا نلاحظ أن اشارة M موجبة وتكون المحاثة المكافئة

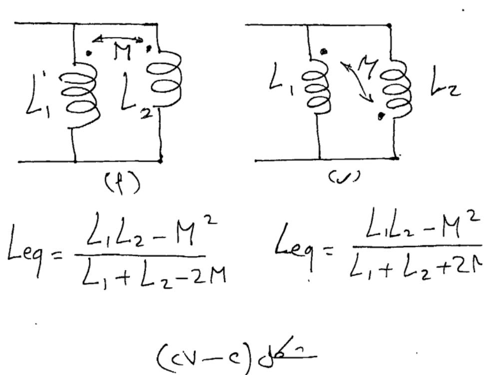
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

وفي شكل ٢ – ٢٦ ب نلاحظ أن اشارة M سالبة وتكون المحاثة المكافئة

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M.$$

(ب) التوصيل على التوازي

شكل ٢ – ٢٧ يبين ملفي حث بينهما حث متبادل ومتصلين علـــى التـــوازي . ونلاحظ أنه في الدائرة ا تكون اشارة M موجبة وفي الدائرة ب تكون اشارة M سالبة .



$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \qquad L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

شكل (٢ – ٢٧)

الطاقة المختزنة في المحاثة ENERGY STORED IN INDUCTANCE

إذا كان التيار المار في ملف حث هو i و فرق الجهد بين طرفيه v فان القدرة

$$P = v\, i$$

$$= \left(L \frac{di}{dt}\right) i$$

وتكون الطاقة المختزنة في المجال المغاطيسي

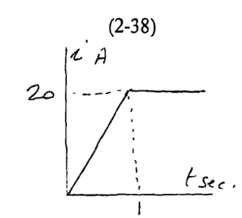
$$W = \int_{t_0}^{t} p\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t} L i \frac{di}{dt} dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} L i^2 \right]_{t_0}^{t}$$

فاذا كانت $t_o = -\infty$ وكانت الطاقة المختزنة عندئذ مساوية للصفر وقيمة التيار صفر . فإن الطاقة المختزنة في الحاثة عند أي زمن t

$$W = \tfrac{1}{2} L i^2 \qquad (2\text{-}38)$$



Example (2-10)

Find the voltage, power and energy for an inductor of 0.1 H when the current through it varies as shown.

The current can be expressed as a function of time

$$i = 0 \qquad t < 0$$
$$i = 20t \quad A \qquad 0 \le t \le 1$$
$$i = 20 \quad A \qquad t > 1$$

The expression for voltage is derived using the relation (2-29),then

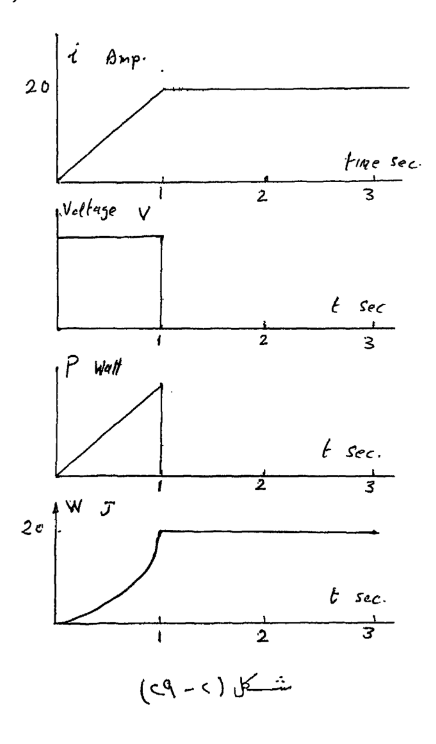
$$v = 0 \qquad t < 0$$
$$v = 2 \quad V \qquad 0 \le t \le 1$$
$$v = 0 \qquad t > 1$$

$$\text{power} = v\, i$$
$$p = 40t \quad W \qquad 0 \le t \le 1$$
$$p = 0 \qquad t > 1$$

$$\text{Energy} = \tfrac{1}{2} L\, i^2$$

At $t = 1$ sec. $\qquad W = 0.05\,(20)^2 = 20 \quad J$

The variation of i , v , p and W are shown in fig (2-29)



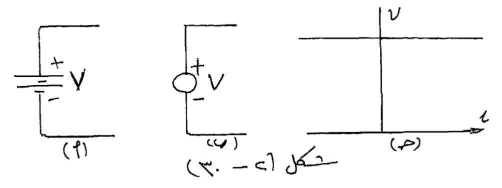
شكل (٢-٢٩)

٢-٢ العناصر الفعالة – المصادر ACTIVE ELEMENTS - SOURSES

المصادر هي العناصر الفعالة التي تمد الدوائر بالطاقة الكهربية وتصنف إلى مصادر جهد ومصادر تيار وقد تكون هذه المصادر مستقلة أو محكومة.

٢-٢-١ مصادر الجهد المستقلة INDEPENDENT VOLTAGE SOURCES

يعرف مصدر الجهد المثالي IDEAL VOLTAGE SOURCE بأنه مصدر للإمـــداد بالطاقة الكهربية عند قيمة ثابتة ومحددة للجهد بين طرفيه لا تعتمد على قيمـــة التيـــار الخارج منه أو على اتجاهه . ويستخدم الرمز المبين في شكل (٢ – ٣٠ا) للدلالة على أن فرق الجهد بين طرفي المصدر لا يتغير مع الزمن (مصدر تيار مستمر D C)كما يستخدم الرمز المبين في شكل (٢ – ٣٠ ب) للدلالة على جميع أنواع المصادر الأخرى كما يمكن التعبير عن خصائص مصدر الجهد المثالية برسم العلاقة بين الجهد والتيار المـــار كمـــا في شكل (٢ – ٣٠ج)



شكل (٢ – ٣٠)

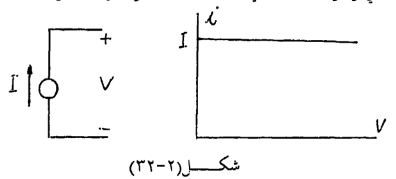
وفي الواقع العملي فإن قيمة الجهد بين طرفي المصدر تتأثر بقيمة التيار المـــار ولا يتحقـــق وجود المصدر المثالي. إلا أنه يمكن تمثيل المصدر الحقيقي بمصدر جهد مثالي مـــع وجـــود مقاومة على التوالي كما في شكل (٢ – ٣١)

شكل(٢ – ٣١)

$$v = v - iR \quad (2\text{-}39)$$

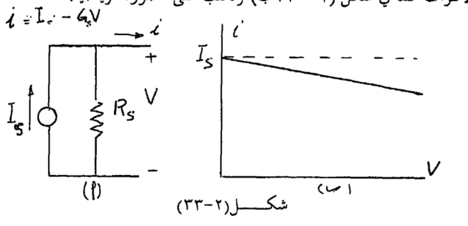
٢-٢-٢ مصادر التيار المستقلة INDEPENDENT CURRENT SOURCES

يعرف مصدر التيار المثالي بأنه مصدر لإمداد الطاقة الكهربية عند قيمة ثابتة للتيــار بغض النظر عن قيمة فرق الجهد بين طرفيه ، وشكل (٢ -٣٢) يبين الرمز المســـتخدم لمصدر التيار المثالي وخواصه المتمثلة في العلاقة بين الجهد والتيار عند طرفيه .



شكـــــل(٢-٣٢)

ومصدر التيار الواقعي PRACTICAL CURRENT SOURCES يمكن تمثيله بمصدر مثـالي ومقاومة على التوازي كما في شكل (٢-٣٣أ) ، وتكون العلاقة بين التيــــار الخـــارج وجهد الأطراف كما في شكل (٢ - ٣٣ ب) ونكتب على الصورة الرياضية.



شكـــــل(٢-٣٣)

وبصورة عامة يمكن ملاحظة الآتي بالنسبة لمصادر الجهد والتيار

أ) مصدر الجهد الذي جهده V = 0 هو عبارة عن دائرة قصر SHORT CIRCUIT كما يمكن النظر إلى دائرة القصر أيضا على أنها مقاومة تساوي صفر أو محاثة لها معـــامل حث L = 0

+ V = ٥ -

ب) مصدر التيار الذي به $i = 0$ عبارة عن دئراة مفتوحة OPEN CIRCUIT كما يمكن النظر إلى الدائرة المفتوحة عبى أنه مقاومة لا نهائية أو مكثف له سعة. $C = 0$

جـ) وجود مقاومة R على التوازي مع مصدر جهد مثالي أو مقاومة على التوالي مع مصدر تيار مثالي لا تغير من خواص المصدر كما هو موضح بشكل(٢- ٣٤)

R
I
≡
I
+
V
-
R ≡
+
V
-

شكـــــل (٢-٣٤)

د) مصدر الطاقة الفعلي يمكن نمذجته على صورة مصدر جهد مثالي ومعه مقاومه على التوالي أو مصدر تيار مثالي ومعه مقاومة على التوازي ، وهاتان الصورتان متكافئتان تماما ويمكن استخدام أيا منهما دون أن تتأثر الدوائر الخارجية . ففي حالة مصدر الجـــهد الفعلي شكل (٢-٣١) فان

$$v_o = v_s - i\ R$$

وفي حالة مصدر التيار الفعلي شكـــــل (٢-٣٣)فإن

$$v_o = (I_s - i_o) R_s$$

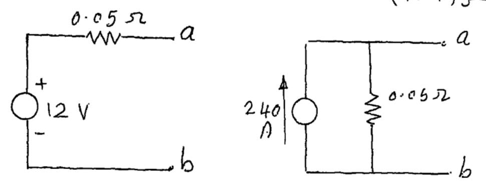
$$v_o = \frac{I_s}{G_s} - \frac{i_o}{G_s}$$

وبمقارنة العلاقتين السابقتين نجد أنهما يؤديان إلى نفس القيمة للجهد v_o على فـــرض أن $G_s = \frac{1}{R_s}$ وأن $V_s = I_s R_s$

Example (2-12)

إذا كان لدينا بطارية لها جهد ١٢ V ولها مقاومة داخلية R = ٠,٠٥ Ω

واذا استخدمت هذه البطارية في تعدية دائرة كهربية يمكن تمثيلها بإحدى الصورتين في شكل (٢-٣٥)



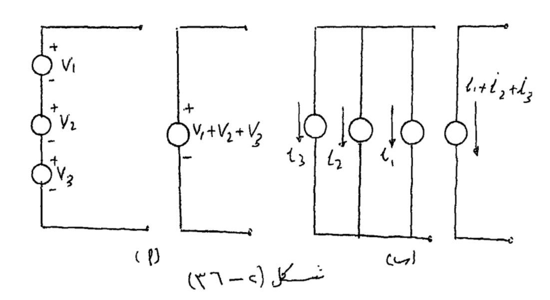
شكل (٢-٣٥)

وهاتان الصورتان متكافئتان تماما ويمكن التحويل من واحدة إلى الأخرى دون أن تتأثر الدائرة المتصلة بين الطرفين. AB

هـ) المصادر المثالية يمكن توصيلها على التوالي أو على التوازي طبقا للقواعد الآتية

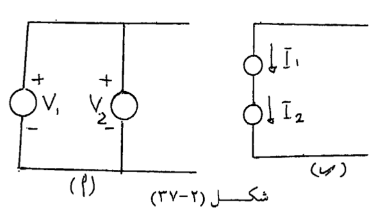
١- مصادر الجهد المثالية المتصلة على التوالي يمكن استبدالها بمصدر واحد جهده يساوي مجموع جهود المصادر كما في شكل (٢ - ٣٦أ)

٢- مصادر التيار المثالية المتصلة على التوازي يمكن استبدالها بمصدر تيار واحد قيمته تساوي مجموع قيم تيارات المصادر كما في شكل (٢ - ٣٦ ب)



شكل (٢-٣٦)

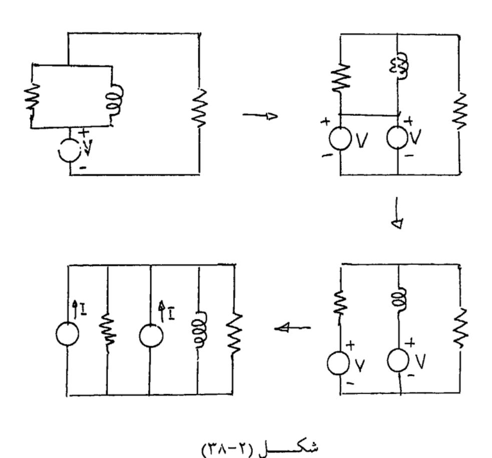
٣- عند توصيل مصادر جهد مثالية على التوازي لا بد وأن تكون قيم جـــهودها متساوية كما في شكل (٢ - ٣٧ أ) وعند توصيل مصادر تيار مثالية على التوالي لا بـــد وأن تكون قيم التيارات لها متساوية كما في شكل (٢ - ٣٧ ب)



شكـــــل (٢-٣٧)

Example (2-13)

الدوائر الأربع المبينة فى شكـــــل (٢-٣٨) متكافئة



شكـــــل (٢-٣٨)

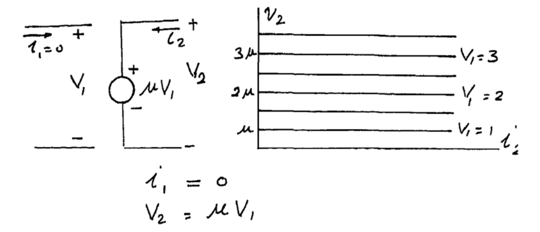
٢-٢-٢ المصادر المحكومة

CONTROLLED SOURCES OR DEPENDENT SOURCES

في هذا النوع من المصادر يكون الجهد بين طرفي مصدر الجهد أو التيار المـــار في مصدر التيار غير ثابت القيمة ولكنه يعتمد على جهد آخر أو تيار آخر وتوجـــد أربعـــة أنواع من المصادر المحكومة.

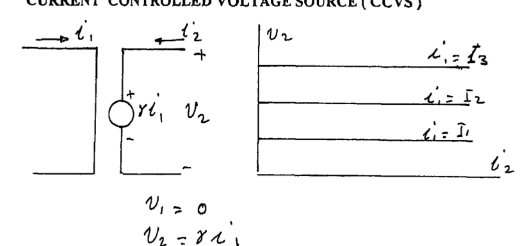
١- مصدر الجهد المحكوم بجهد

VOLTAGE CONTROLLED VOLTAGE SOURCE (VCVS)



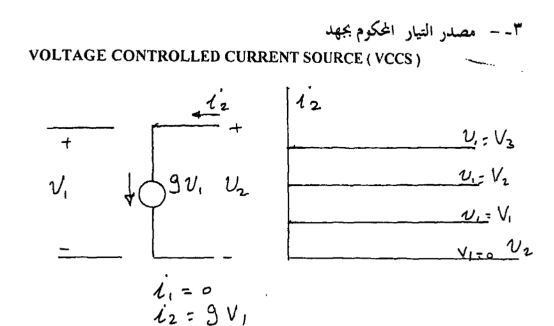
٢- مصدر الجهد المحكوم بتيار

CURRENT CONTROLLED VOLTAGE SOURCE (CCVS)



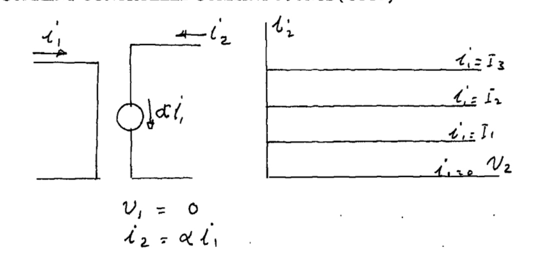
٣-- مصدر التيار المحكوم بجهد

VOLTAGE CONTROLLED CURRENT SOURCE (VCCS)



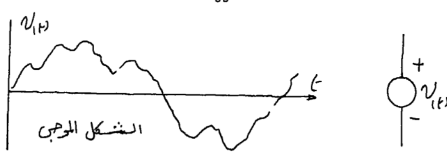
٤-- مصدر النيار المحكوم بتيار

CURRENT CONTROLLED CURRENT SOURCE (CCCS)

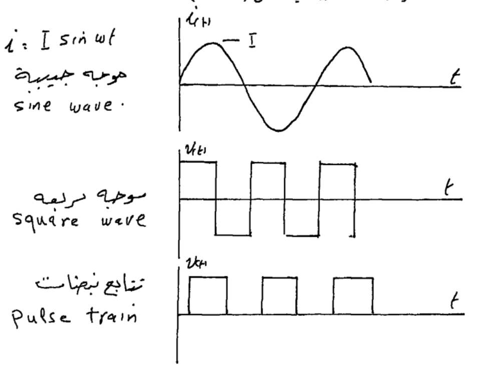


الأشكال الموجية — WAVE FORMS

الجهود والتيارات في الدوائر الكهربية إما أن تكون ثابتة وتعرف في هذه الحالة بالتيار المستمر DC أو متغيرة مع الزمن ويعرف المخطط الذي يبين تغير الجهد أو التيار مع الزمن بأنه الشكل الموجي WAVE FORM



وفى الدوائر البسيطة فإننا نهتم بتحليل الدوائر التي تتعامل مع الأشكال الموجبة الدورية التي تحقق العلاقة $f_{(t)} = f(t + NT)$ حيث T هو الزمن الدوري و N عدد صحيح ومن أمثلة الأشكال الموجبة تللك المبينة في شكل (٢-٤٠)



EFFECTIVE VALUE OR ROOT MEAN SQUARE (RMS) **لقيمةالفعالة**

إذا مر تيار متغير مع الزمن في مقاومة R فإن القدرة المستهلكة في المقاومة تكون متغيرة مع الزمن $P_{(t)}$ ويكون لها قيمة متوسطة P نفس قيمة القدرة P يمكن الحصول عليها إذا مر تيار ثابت في نفس المقاومة R وفي هذه الحالة تعرف قيمة التيار I_{rms} بأنه لقيمة الفعالة للتيار $i_{(t)}$ وهي مساوية للتيار الثابت I ، وبنفس الطريقة تعرف القيمة لفعالة للجهد V_{rms} وتحتسب القيمة الفعالة للتيار الدوري من العلاقة.

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(i_{(t)}\right)^2 dt} \qquad (2\text{-}46)$$

وفي حالة الموجة الجيبية تكون $I_{rms} = \frac{I_{max.}}{\sqrt{2}}$

عامل الشكل FORM FACTOR

يعرف عامل الشكل للجهد أو التيار بأنه النسبة بين القيمة الفعالة للموجة والقيمة المتوسطة

$$FF = \frac{V_{rms}}{V_{av.}} \quad , \quad V_{av} = \frac{1}{T_o}\int^{T} v_{(t)}\, dt$$

يلاحظ عند حساب عامل الشكل لموجة مثل الموجة الجيبية فإن القيمة المتوسطة تســـاوي صفر نظرا لتماثل الموجه . في مثل هذه الحالة يحسب القيمة المتوسطة على نصف الموجة فقط.

الوحدات المستخدمة في النظام العالمي للوحدات SYSTEM INTERNATIONAL

الكميه		اسم الوحده	الرمز
Length	الطول	Metre	M
Mass	الكتلة	Kilogramme	Kg
Time	الزمن	Secand	Sec
Current	التيار	Ampere	A
Force	القوه	Newton	N
Energy – work	الطاقه – الشغل	Joule	J
Power	القدره	Watt	W
Charge	الشحنه	Coulomb	C
Potential difference	فرق الجهد	Volls	V
Resistance	المقاومة	Ohm	Ω
Conductance	المواصلة	Siemens	S , $\mho$
Inductance	المحاثه الذاتية	Henry	H
Capacitance	السعة	Farad	F



٢-٥ تمــــارين

2.1 Find the resistance of the following copper wires of resistivity 1.73 $\mu\Omega$cm.

a) 1 mm cross-section and 10 m long

b) 24 mm cross-section and 10 m long

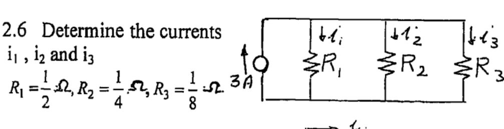
2.2 A rectangular metal strip has the dimensions x = 10 cm y= 0.5 cm and z =0.2 cm determine the ration Rx : Ry : Rz between the respective pairs of opposite faces.

2.3 Find the voltage V3 and the current i and show that the power dissipated by the 3 resistances is equal to the power supplied by the source.

2.4 (a) Determine the value of R_o So that $V_0/V_s = 1/6$.

(b) Determine the value of R_o so that one half of the power supplied by the source is absorbed by R_0

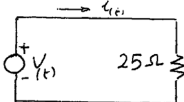
2.5 Find the equivalent resistance looking into terminals ab



2.6 Determine the currents i_1 , i_2 and i_3

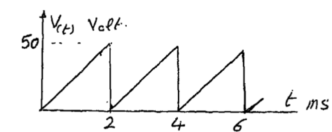
$R_1 = \frac{1}{2}\Omega, R_2 = \frac{1}{4}\Omega, R_3 = \frac{1}{8}\Omega$

2.7 Sketch $V_{(t)}$, $i_{(t)}$ and the power $P_{(t)}$ in the following cases

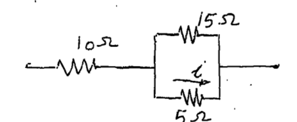


(a) $V_{(t)} = 150\sin 2\pi t$

(b) $i_{(t)}$ varies as shown.



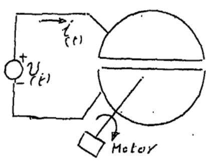
(c) $V_{(t)}$ is a saw-tooth wave as shown.



2.8 The current i is given by $i = 6\sin wt$ find the current in the 10 Ω and 15 Ω resistors and the instantaneous power in each resistor.

2.9 Consider a pure capacitor with an applied voltage $v_{(t)} = V \sin wt$ v. Find the current $i_{(t)}$ the power $P_{(t)}$, the charge $q_{(t)}$ and the stored energy $W_{(t)}$ assuming $W_{(0)} = 0$

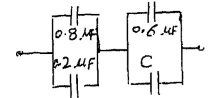
2.10 The fig shows two plates one of which is driven by a motor such that the capacitance between the plates varies according to the equation $C = C_0(1 - Cos\, \omega t)$



a) If $\upsilon_t = V$ volts (const.) find the current i as function of time.

b) If $\upsilon_t = V_o \sin wt$, what is the equation of the current $i_{(t)}$

2.11 what is the capacitance C to give an equivalent $C_{eq} = 0.5\mu f$

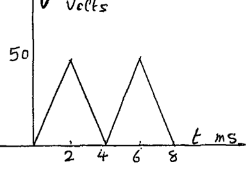


2.12 Two ideal capacitors C_1 and C_2 and an open switch are connected in series. The capacitors have initial voltages V_1 and zero volts resp. Find the voltages across the capacitors and the energy stored in them after the switch is closed.

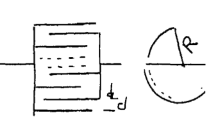
2.13 The given wave forms of the voltage are applied to a pure capacitance of $60\mu f$. Sketch $i_{(t)}$ and p in each case

(a) $\upsilon_{(t)} = 10\sin 314t$

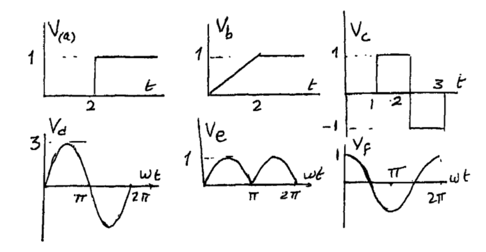
(b) $V_{(t)}$ is the triangular wave shown .



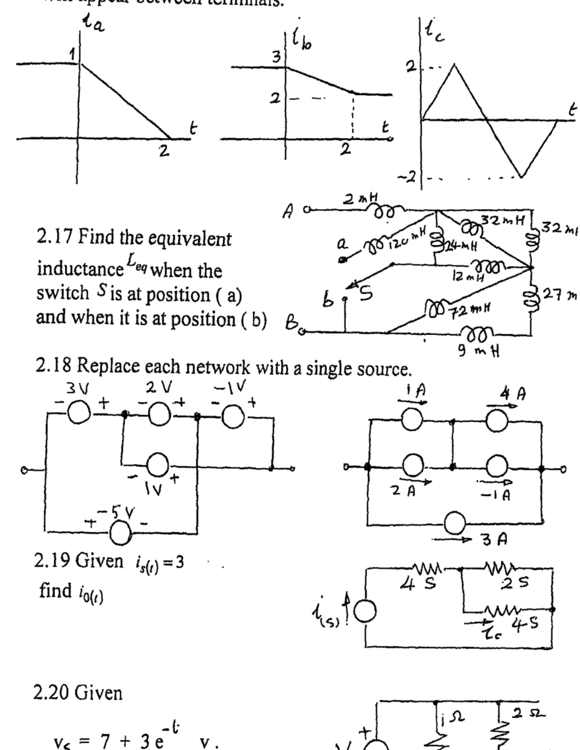
2.14 The tuning capacitor in radio receivers are represented as shown. The plates are separated by air a distance d. what is the maximum capacitance of the tuning capacitor.



2.15 The wave shapes shown are applied as input voltages to a 1 H inductor. Draw the shapes of the resulting currents. Assuming $i_o = 0$



2.16 The wave shapes shown are applied as input currents to a 2 H inductor Draw the resulting wave shape of the voltage that will appear between terminals.



2.17 Find the equivalent inductance L_{eq} when the switch S is at position (a) and when it is at position (b)

2.18 Replace each network with a single source.

2.19 Given $i_{s(t)} = 3$

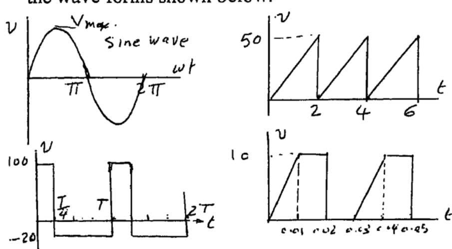
find $i_{0(t)}$

2.20 Given

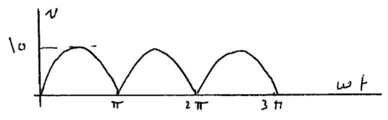
$v_s = 7 + 3e^{-t}$ v.

Find v_0

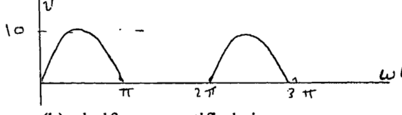
2.21 Find the average value and the effective (rms) value of the wave forms shown below.



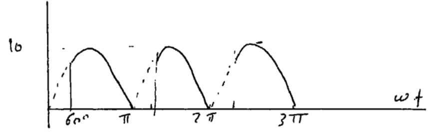
2.22 Find the form factor of the wave forms shown



(a) Full wave rectified since wave.



(b) half wave rectified sine wave.



(c) Delayed full wave rectified sine wave.

الفصل الثالث

معادلات الشبكات

NETWORK EQUATIONS

سبق أن عرفنا الدائرة الكهربية بأنها إتصال بين مجموعة من العناصر .و يطلق على هذا الاتصال لفظ الدائرة circuit أو الشبكة . و لتحديد العلاقة بين الجهود و التيارات فى الشبكات الكهربية صاغ كيرتشوف Kirchhoff قانونين هما : -

٣-١ قانون كيرتشوف للجهد Kirchhoff's Voltage law.(KVL)

المجموع الجبرى لفروق الجهد مأخوذة فى اتجاه دورى واحد حول أى مسار مغلق من الشبكة يكون مساوياً للصفر عند أى لحظة زمنية .

فمثلاً فى الدائرة المبينة .

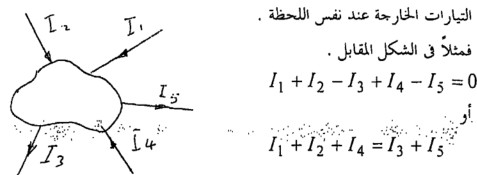
$$-v_g + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

كما أن القانون يصاغ أحياناً بصورة أخرى كالآتى

حول أى مسار معلق عند أى لحظة زمنية فإن الإرتفاع فى الجهد (نتيجة لمصدر جهد) لابد أن يساوى الهبوط فى الجهد (نتيجة للعناصر الخاملة)
و ذلك طبقاً لمبدأ بقاء الطاقة Low of conservation of energy

٢ قانون كيرتشوف للتيار **Kirchhoff's Current Law** (KCL)

المجموع الجبرى للتيارات الداخلة لأى سطح مغلق فى الدائرة عند أى لحظة زمنية يساوى صفر .
أى أن مجموع التيارات الداخلة عند أى لحظة زمنية لابد أن تساوى مجموع التيارات الخارجة عند نفس اللحظة .
فمثلاً فى الشكل المقابل .



$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

أو

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

٣ صياغة معادلات الشبكات **Formulation of Network equations**

يتطلب حل الدوائر الكهربية الحصول على قيمة الجهد و التيار عند كل نقطة من نقط الدائرة فى أى لحظة زمنية . وللوصول إلى ذلك يلزم كتابة المعادلات التى تحكم العلاقة بين الجهد و التيار و يطبق فى ذلك قوانين كيرشوف بالإضافة إلى العلاقات التى تربط الجهد و التيار عند أطراف العناصر المختلفة .

و بصفة عامة فإن المعادلات التى نحصل عليها هى معادلات تفاضلية خطية
Linear differntial equations

و سنوضح ذلك ببعض الأمثلة :-

مثال (٣-١)

دائرة مكونة من مقاومة R

و محاثة L على التوالى تتغذى من مصدر للجهد

حل الدائرة يتطلب الحصول على معادلة التيار $i_{(t)}$

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد نجد أن

$$v_{(t)} = v_R + v_L$$

و بتعويض علاقات العناصر نجد أن $v_{(t)} = iR + L\frac{d_i}{d_t}$

مثال (٣-٢)

$$v_{(t)} = iR + L\frac{d_i}{d_t} + \frac{1}{c}\int idt$$

و هذه المعادلة يمكن كتابتها بدلالة الشحنة $q_{(t)}$ على الصورة

$$v_{(t)} = R\frac{dq_{(t)}}{d_t} + L\frac{d_2q_{(t)}}{d_{t2}} + \frac{q_{(t)}}{c}$$

أو بدلالة التيار على الصورة .

$$\frac{dv_{(t)}}{d_t} = R\frac{d_i}{d_t} + L\frac{d_2i}{d_{t2}} + \frac{i}{c}$$

مثال (٣-٣)

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad \text{(KCL)}$$

$$\upsilon_{1+1} = i_1 R_1 + \frac{1}{c}\int i_2 dt \qquad \text{(KCL)}$$

$$0 = i_3 R_2 + L\frac{di_3}{dt}\frac{1}{c}\int i_2 dt \qquad \text{(KVL)}$$

(مثال ٣- ٤)

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad \text{(KCL)}$$

$$i_3 = i_4 + i_5 \qquad \text{(KCL)}$$

$$\upsilon_{(t)} = i_1 R_1 + i_2 R_2 \qquad \text{(KVL)}$$

$$0 = \frac{1}{c_1}\int i_3 dt + i_4 R_3 - i_2 R_2 \qquad \text{(KVL)}$$

$$0 = \frac{1}{c_2}\int i_5 dt + i_5 R_4 - i_4 R_3 \qquad \text{(KVL)}$$

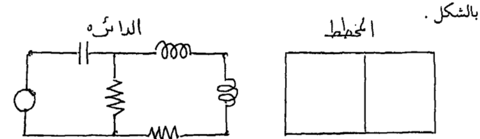
و نحصل على قيم التيارات المختلفة بإيجاد حلول للمعادلات التفاضلية و من التيارات نحصل على قيمة الجهود بين أطراف العناصر المختلفة طبقاً للعلاقة المميزة لكل عنصر .

٣-٤ طوبوغرافية الشبكات Network Topology

طوبوغرافية الشبكة هى هندسة الشبكة أو الطريقة التى تتصل بها العناصر مع بعضها بغض النظر عن نوعية هذه العناصر . و لتوضيح ذلك سنذكر بعض التعريفات .

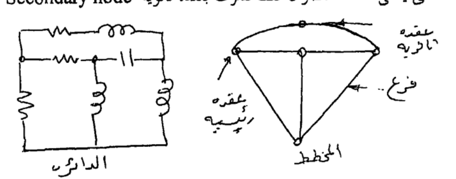
المخطط Graph

المخطط هو رسم تخطيطى مبسط الدائرة حيث يتم تمثيل كل عنصر بنقطة مستقيمة كما بالشكل .



العقدة Node

العقد هى نهايات العناصر التى تتصل عندها مع غيرها من العناصر و العقدة و العقدة التى يلتقى عندها ثلاثة عناصر فأكثر عندها ثلاثة رئيسية Principal Node أما العقدة التى يلتقى عندها عنصران فقط فتعرف بعقدة ثانوية Secondary node



الزوج العقدى Node Pair

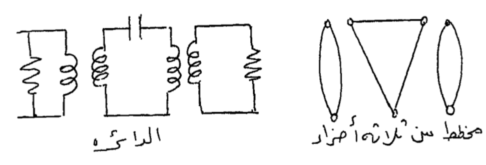
يمكن إختيار عقدتين لعمل زوج عقدى فعادة فى تحليل الدوائر نختار أحدى العقد الرئيسية لتكون مرجعاً للدائرة reference node و هذه العقدة المرجع تكون مع أى عقدة أخرى زوج عقدى .

الفرع Branch

الفرع هو جزء من الدائرة مكون من عنصر واحد أو عدة عناصر متصلة على التوالى و على ذلك فالفرع يمكن أن يتضمن عقدة ثانوية أو أكثر .

الجزء المنفصل من المخطط A separate part of a graph

هو جزء من المخطط غير متصل كهربياً بالأجزاء الأخرى .

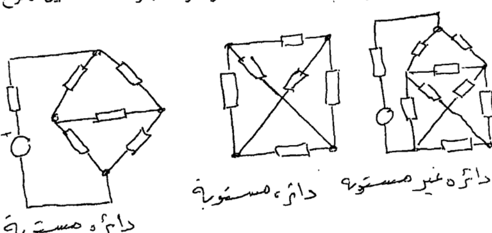


الشبيكة أو الحلقة Mesh or Loop

هى مسار مغلق يبدأ عند إحدى العقد و يمر بالأفرع و العقد الأخرى حتى يعود إلى نقطة البداية .

الشبكة المسطحة أو المستوية Planar or Flat network

هى الشبكة التى يمكن رسم المخطط لها فى مستوى واحد بدون تقاطعات بين الأفرع .

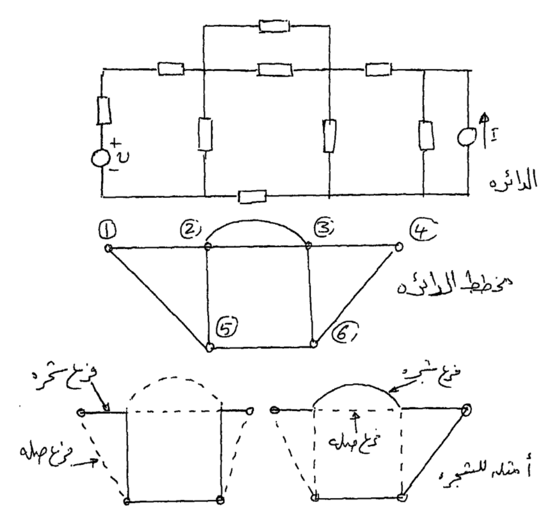


الشجرة A Tree

هى جزء من المخطط الذى فيه تتصل جميع العقد الرئيسية دون أن يكون هناك أى مسار مغلق .

و أفرع المخطط الغير موجودة فى الشجرة تعرف بأفرع الصلة .

و تعرف أفرع الشجرة بالأوتار Cords



و نلاحظ أن هذه الدائرة المكونة من جزء واحد مستقل تحتوى على

عدد أفرع الشجرة . $b_t = n - 1$

حيث n هو عدد العقد

و بصفة عامة فإن عدد أفرع الشجرة يكون $b_t = n - p$

حيث P هو عدد الأجزاء المستقلة فى الدائرة

فإذا كان عدد الأفرع الكلية هو b فإن عدد أفرع الصلة يكون $b_l = b - b_t$

أى أنه للدائرة ذات الجزء الواحد $b_l = b - n + 1$

وللدائرة ذات P جزء $b_l = b - n + 1$

٣-٥ تحليل الدوائر Network Analysis

يعتمد تحليل الدوائر على تطبيق قوانين كيرتشوف للجهد و التيار و يوجد ثلاث طرق أساسية لتحليل الدوائر تعتمد على طريقة تعريف متغيرات الدائرة .

أولاً : التحليل بإستخدام تيارات الأفرع .

حيث يتم فرض تيار فى كل فرع من أفرع الدائرة و تكتب مجموعة من المعادلات بدلالة هذه التيارات بتطبيق قوانين كيرتشوف كما تم إيضاحه فى الأمثلة من ١ – ٤

ثانياً : التحليل بإستخدام تيارات الشبيكة أو الحلقة .

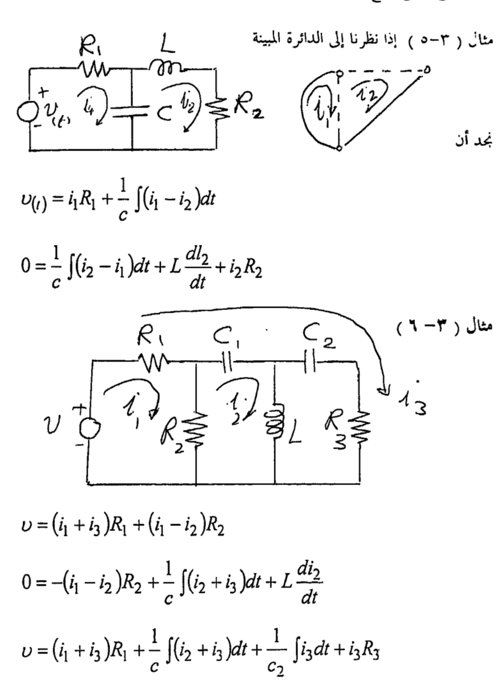
Mesh or Loop Currents Analysis

حيث يتم فرض تيار فى كل شبيكة أو حلقة مستقلة من الدائرة و يطبق قانون كيرتشوف للجهد لكتابة معادلة لكل حلقة و يكون عدد المعادلات المستقلة التى يمكن كتابتها فى هذه الحالة مساوياً لعدد أفرع الصلة للشجرة أى أن

عدد المعادلات = $b - n + P$

و يتم كتابة المعادلات بحيث يكون هناك وصلة جديدة على الأقل فى كل معادلة و يكرر ذلك حتى تنتهى جميع الوصلات وبذلك نحصل على معادلات الدائرة .

مثال (٣-٥) إذا نظرنا إلى الدائرة المبينة



نجد أن

$$\upsilon_{(t)} = i_1 R_1 + \frac{1}{c}\int (i_1 - i_2)dt$$

$$0 = \frac{1}{c}\int (i_2 - i_1)dt + L\frac{dl_2}{dt} + i_2 R_2$$

مثال (٣- ٦)

$$\upsilon = (i_1 + i_3)R_1 + (i_1 - i_2)R_2$$

$$0 = -(i_1 - i_2)R_2 + \frac{1}{c}\int (i_2 + i_3)dt + L\frac{di_2}{dt}$$

$$\upsilon = (i_1 + i_3)R_1 + \frac{1}{c}\int (i_2 + i_3)dt + \frac{1}{c_2}\int i_3 dt + i_3 R_3$$

بحل المعادلات نحصل على تيارات الحلقات و منها نحصل على تيارات الأفرع و الجهود على أطراف العناصر .

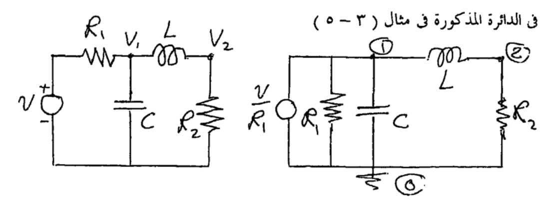
ثالثاً : التحليل بإستخدام جهد العقدة **Node Voltage Analysis**

و ذلك بأخذ إحدى العقد كمرجع للدائرة و تحديد جهدها بصفر و فرض الجهود عند باقى العقد كمتغيرات للدائرة ، و يكون عدد المعادلات فى هذه الحالة مساوياً لعدد أزواج العقد و هو يساوى عدد أفرع الشجرة .

$$b_r = n - p$$

(مثال ٣-٧)

فى الدائرة المذكورة فى مثال (٣ – ٥)



بتطبيق قانون كيرتشوف للتيار .

$$\frac{\upsilon}{R_1} = \frac{\upsilon_1}{R_1} + C\frac{d\upsilon_1}{dt} + \frac{1}{L}\int(\upsilon_1 - \upsilon_2)dt$$

$$0 = \frac{1}{L}\int(\upsilon_2 - \upsilon_1)dt + \frac{\upsilon_2}{R_2}$$

مثال (٣– ٨)

$$i_1 = G_1\upsilon_1 + G_2(\upsilon_1 - \upsilon_2) + G_4(\upsilon_1 - \upsilon_3)$$

$$0 = G_2(\upsilon_2 - \upsilon_1) + C\frac{d_t}{\upsilon_t} + \frac{1}{L}\int(\upsilon_2 - \upsilon_3)dt$$

$$i_2 = G_4(\upsilon_3 - \upsilon_1) + \frac{1}{L}\int(\upsilon_3 - \upsilon_1)dt + G_3\upsilon_3$$

ملاحظات :

- عند إستخدام طريقة تيار ت الحلقة (Loop currents) يجب وضع جميع المصادر على صورة مصادر جهد . و عند إستخدام طريقة جهد العقدة يجب وضع جميع المصادر على صورة مصادر تيار .

- فى الدوائر التى تحتوى على حث متبادل يفضل إستخدام طريقة تيار الحلقة .

مثال (٣-٩)

$$\upsilon_s = i_1 R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

$$0 = i_2 R_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

مثال (٣-١٠)

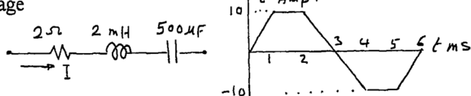
$$v_{(t)} = 5 i_1 + 7\frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + 2\frac{d}{dt}(i_3 - i_2)$$

$$0 = 7\frac{d(i_2 - i_1)}{dt} + 2\frac{d(i_2 - i_3)}{dt} + \int i_2 dt + 6\frac{d}{dt}(i_2 - i_3) + 2\frac{d}{dt}(i_2 - i_1)$$

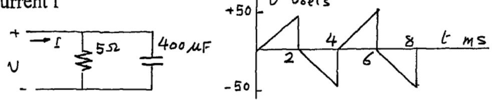
$$0 = 6\frac{d}{dt}(i_3 - i_2) + 2\frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + 3 i_3$$



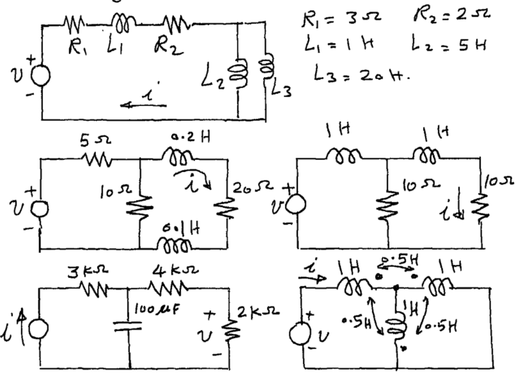
3-1 For the series RCLcircuit shown the current I has the wave form shown .find the voltage across each element and the total voltage



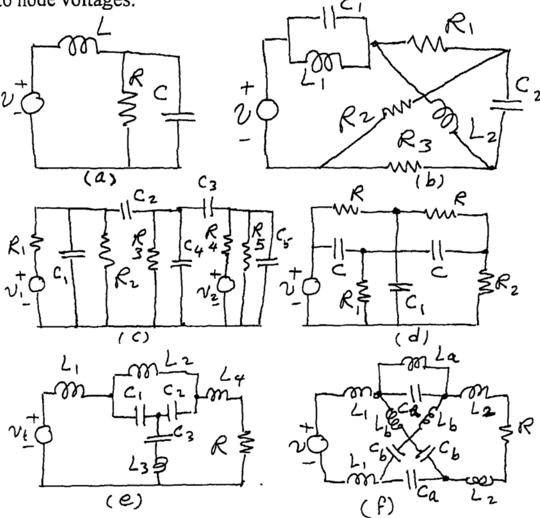
3-2 The parallal RC circuit shown has the applied voltage below .Determine the current in each branch and the total current I



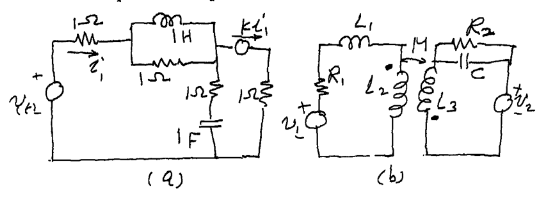
3-3 Find the differential equation relating i and v in the following circuits.



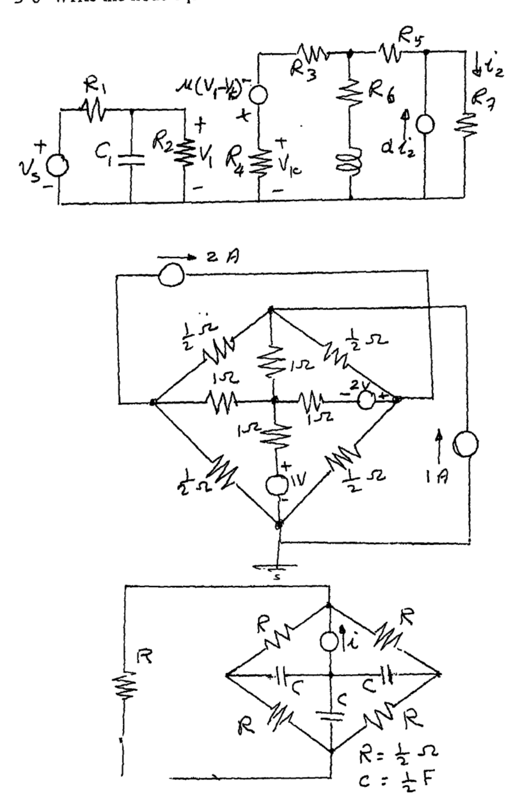
3-4 For each of the networks shown determine the number of independent loop currents and the number of independent node to node voltages.



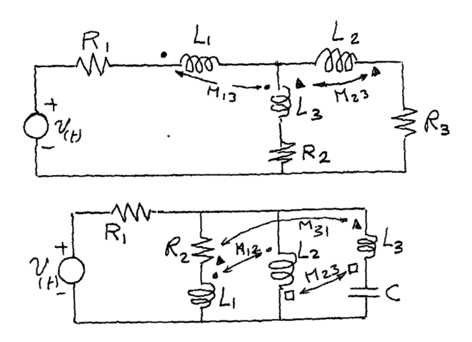
3-5 Write loop current equations for the networks shown.



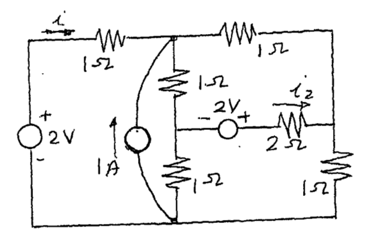
3-6 Write the node equations for the networks shown.



3-7 Write loop current equations for the circuit shown.



3-8 Find the value of the current i



الفصل الرابع

دوائر المقاومات
Resistive Circuits

عند تطبيق قوانين كيرتشوف على الدوائر الكهربية نحصل على معادلات تكاملية تفاضلية Integro – differential eqns. و تتوقف درجة المعادلات الناتجة على عدد العناصر المختزنة للطاقة (المحاثات و المكثفات) فى الدائرة . و يلزم حل هذه المعادلات للحصول على إستجابة الدائرة .

فى كثير من الحالات تحتوى الدوائر على مقاومات فقط و لا تحتوى على عناصر خزنة للطاقة . فى هذه الحالات تكون المعادلات الناتجة خالية من عمليات التفاضل و

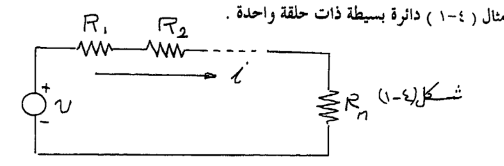
التكامل . أى أن المعادلات الناتجة فى هذه الحالة تكون معادلات جبرية يسـهل حلـها للحصول على قيم الجهود و التيارات فى كل جزء من أجزاء الدائرة .

و توجد طرق عدة لحل دوائر المقاومات يمكن إتباع أى منها . و يتوقف ذلك على مدى بساطة الدائرة ويتم الحل بتطبيق قانون أوم و قوانين كيرتشوف على الدائرة .

٤-١ طرق الأختصارات البسيطة .

تظهر بعض الدوائر فى صورة بسيطة تحتوى على عدد قليل من الحلقات و العقد . فى هذه الحالة يمكن عمل بعض الإختصارات لنبسط الدائرة و تسهيل الحصول على قيم الجهود و التيارات المطلوبة و سنوضح ذلك ببعض الأمثلة

مثال (٤-١) **دائرة بسيطة ذات حلقة واحدة .**



شكل(٤-١)

شكل (٤-١) يبين دائرة مكونة من مجموعة من المقاومات متصلة على التوالى و يغذيها مصدر جهد قيمته υ كما فى الشكل

نحصل على التيار فى الدائرة من العلاقة .

$$i = \frac{\upsilon}{R_1 + R_2 + \dots\dots\dots\dots + R_n}$$

و للحصول على الجهد بين طرفى أى مقاومة نضرب التيار فى قيمة المقاومة فمثلاً الجهد على المقاومة R_n هو

$$\upsilon_n = iR_n = \upsilon \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots\dots R_n}$$

و فى حالة وجود مقاومتين فقط تعرف الدائرة بمجزئ الجهدP otential Divider

فإذا أردنا الحصول على جهد مقداره $a\upsilon$ من مصدر جـهده V فإننـا نحتـاج إلى

مقاومتين R_1, R_2 توصلان على التوالى مع المصدر كما فى الشكل (٤-٢) بحيث

تكون

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

أى أن

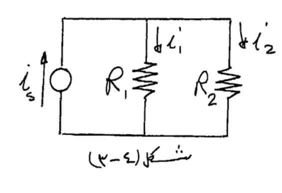
$$R_2 = R_1 \frac{(1-a)}{a}$$

شكل (٤-٢)

و جدير بالملاحظة أن هذه العلاقات صحيحة فقط فى حالة ما إذا كان التيار i يمر بكلا المقاومتين R_1, R_2 أى أنه لا يوجد تيار خارج من الدائرة عند الطرف الذى نقيس عنده الجهد $a\upsilon$

مثال (٤-٢) تجزئ التيار **Current Division**

تمر بنا كثير من الدوائر مثل التى فى الشكل (٤-٣) حيث يتجزأ التيار i_s إلى جزئين i_1 فى الفرع الذى مقاومته R_1 ، i_2 فى الفرع الذى مقاومته R_2 و طبقاً لقانون كيرتشوف للتيار



شكل (٤-٣)

$$i_s = i_1 + i_2$$
$$= (G_1 + G_2)\upsilon$$
$$\upsilon = \frac{i_s}{G_1 + G_2}$$
$$i_1 = G_1\upsilon = i_s \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$
$$i_2 = G_2\upsilon = i_s \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

و بدلالة المقاومة فإن

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s$$

مثال (٤-٣) فى الدائرة المبينة فى شكل (٤-٤) أحسب i ، i_1 ، i_2 و القدرة الخارجة من المصدر و القدرة المفقودة فى المقاومات و الجهاد الخارج υ_0

شكل (٤-٤)

المقاومة المكافئة المتصلة بالمصدر هى

$$R_e = 4 + \frac{15(6+4)}{15+(6+4)}$$

$$i = \frac{20}{10} = 2$$

$$i_1 = 2\frac{10}{15+10} = 0.8A$$

$$i_2 = 2\frac{15}{15+10} = 1.2A$$

القدرة الخارجة من المصدر

$$P_s = 20 \times 2 = 40 \quad watt$$

القدرة المفقودة فى المقاومات

$$P = (0.8)^2 \times (0.8)^2 \times 6 + (1.2)^2 \times 15 + (2)^2 \times 4 = 40 \quad watt$$

$$\upsilon_0 = i_2 \times R = 1.2 \times 4 = 4.8 \quad \textbf{v.}$$

٤-٢ تحويل نجمة دلتا ($\Delta = Y$) **Delta Transformation**

من التوصيلات التى تتكرر كثيراً فى الدوائر الكهربية توصيلة نجمة ⅄ و دلتا △ حيث لكل منها ثلاثة أطراف للتوصيل الخارجى كما فى شكل (٤-٥)

شكل (٤-٥)

و فى الدوائر التى تحتوى على هذه الصور يلزم فى كثير من الأحيان التحويل من إحدى الصور إلى الصورة الأخرى و تحويل ⅄ - △ يعطى العلاقة بين قيم المقاومات فى الدائرتين بحيث أن أياً منهما تحل محل الأخرى دون ان يؤثر ذلك على بقية الدائرة المتصلة بالأطراف الثلاثة .

فإذا كان لدينا ثلاث مقاومات متصلة فى صورة دلتا △ و نود الحصول على توصيلة ⅄ المكافئة فإننا نحصل على العلاقة بين المقاومات فى الدائرتين إذا ساوينا المقاومات بين أى طرفين عندما يكون الطرف الثالث مفتوحاً . و بذلك نحصل على ثلاث علاقات هى

بين الطرفين 1,2

$$R_{12} = R_1 + R_2 = \frac{R_A(R_c + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$$

بين الطرفين 3,2

$$R_{23} = R_2 + R_3 = \frac{R_B(R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$

بين الطرفين 1, 3

$$R_{31} = R_3 + R_1 = \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$$

من العلاقات الثلاثة السابقة يمكن الحصول على R_3, R_2, R_1 المتصلة ⅄ و المكافئة لـ R_C, R_B, R_A المتصلة △ فى شكل (٤-٥)

فمثلاً نحصل على R_1 بجمع الأولى و الثالثة و طرح الثانية فنجد ان

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad (4 - 1)$$

و بالمثل يمكن الحصول على R_3, R_2 حيث

$$R_2 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \qquad (4 - 2)$$

$$R_3 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad (4\text{-}3)$$

أيضاً إذا كانت عناصر توصيله λ هى المعروفة فيمكن الحصـــول علـــى عناصر Δ المكافئة بمساواة المواصلة بين كل طرفين عندما يكون الطرف الثالث مقصور Short Circuit

$$G_A + G_B = \frac{G_2 + (G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

بين 3, 2 عندما يكون 1 مقصوراً إلى 2

$$G_b + G_c = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

بين 3, 1 عندما يكون 2 مقصوراً إلى 3

$$G_c + G_A = \frac{G_3(G_3 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

و من العلاقات الثلاثة السابقة يسهل الحصول على

$$G_A = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad (4\text{-}4)$$

$$G_B = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad (4\text{-}5)$$

$$G_C = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad (4\text{-}6)$$

كما يمكن كتابة العلاقات السابقة بدلالة المقاومات كالآتى :-

$$R_A = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \qquad (4\text{-}7)$$

$$R_B = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad (4\text{-}8)$$

$$R_C = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \qquad (4\text{-}9)$$

مثال (٤-٤) لحساب التيار فى الدائرة المبينة فى شكل (٤-٦) نحتاج إلى حساب المقاومة المكافئة للدائرة بين النقطتين A, B و للحصول على المقاومة المكافئة R_{AB} يلزم تحويل الـ $\triangle$EDC إلى $\curlywedge$ و تصبح الدائرة كما فى شكل (٤ - ٧) حيث تكون

شكل (٤-٦)

شكل (٤-٧)

$$R_{AB} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{(2+5)(1+3)}{(2+5)+(1+3)} = 4.2 \quad \Omega$$

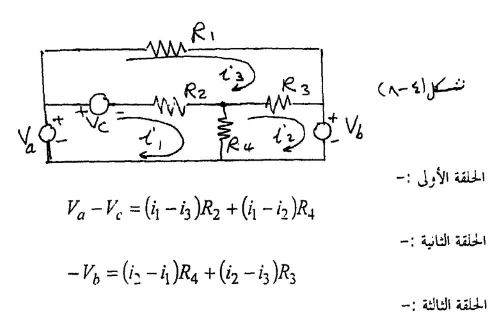
و يكون التيار

$$i = \frac{2}{4.2} = 0.476 \quad A$$

و يمكن الوصول لنفس النتيجة بعمل تحويلات أخرى مثل تحويل الجزئية CDEB إلى دلتا و هكذا

٤-٣ الحل بإستخدام معادلات تيار الحلقة Loop Current Equations

تعتمد هذه الطريقة على تطبيق قانون كيرتشوف للجهد (KVL) حول ممر مغلق . و يعرف تيار الحلقة بأنه التيار الذى يمر فى جميع المقاومات التى تغلق الحلقة . فإذا نظرنا إلى الدائرة البسيطة فى شكل (٤ - ٨) نجد أنها مكونة من ثلاث حلقات مستقلة لكتابة معادلات هذه الدائرة نفرض تيارات الحلقات i_1 ، i_2 ، i_3 ، ...... و سوف نستخدم إصطلاحاً الإتجاهات المبينة (فى إتجاه عقارب الساعة) . ثم نطبق قانون كيرتشوف للجهد لكتابة معادلة لكل حلقة .



شكل (٤-٨)

الحلقة الأولى :-

$$V_a - V_c = (i_1 - i_3)R_2 + (i_1 - i_2)R_4$$

الحلقة الثانية :-

$$-V_b = (i_2 - i_1)R_4 + (i_2 - i_3)R_3$$

الحلقة الثالثة :-

$$V_c = i_3 R_1 + (i_3 - i_3)R_3 + (i_2 - i_1)R_3$$

بإعادة ترتيب المعادلات السابقة يمكن كتابتها على الصورة .

$$\begin{aligned} V_a - V_c &= (R_2 + R_4)i_1 - R_4 i_2 - R_2 i_3 \\ -V_b &= -R_4 i_1 + (R_3 + R_4)i_2 - R_3 i_3 \\ V_c &= -R_2 i_1 - R_3 i_2 + (R_1 + R_2 + R_3)i_3 \end{aligned}$$

و يمكن وضع هذه المعادلات في صورة مصفوفة كالأتي

$$\begin{bmatrix} V_a - V_c \\ -V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 + R_4 & -R_4 & -R_2 \\ -R_4 & R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & -R_3 & R_1 + R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

و بحل هذه المعادلة نحصل على التيارات i_1 ، i_2 ، i_3 و منها نحصل على تيارات العناصر . فمثلاً التيار المار فى المقاومة R_2 هو $\left(i_1 - i_3\right)$ و التيار المار فى المقاومة R_4 هو $\left(i_1 - i_2\right)$ و هكذا

مثال (٤-٥) الدائرة المبينة فى شكل (٤-٩).

شكل (٤-٩)

إذا طبقنا الخطوات السابقة نجد أن معادلات الدائرة تكون على صورة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -9-3 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2 & -2 & -1 \\ -2 & 2+3 & -3 \\ -1 & -3 & 1+3+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

بحل هذه المعادلات بتطبيق قاعدة كرامر مثلاً نجد أن

$i_3 = 1A$ و $i_2 = -1A$ و $i_1 = 2A$

و الإشارة السالبة لـــ i_2 تعنى أن سريان التيار i_2 هو عكس التيار المفروض و للحصول على التيار فى المقاومة 2Ω نجد أنه يساوى $i_1 - i_2$ أى يساوى $2-(-1) = 3A$ و فرق الجهد $V = 2 \times 3 = 6V$

و بصفة عامة إذا كان لدينا دائرة تحتوى على عدد n حلقة مستقلة فإننا يمكن أن نكتب معادلات الدائرة على صورة مصفوفة

$$[V] = [R] \cdot [i] \qquad (4\text{-}11)$$

حيث

$$[V]^t = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad .... \quad V_5 \quad ..... \quad V_n]$$

حيث V_i هى مجموع جهود المصادر فى الحلقة i مع اعتبار جهد المصدر موجباً إذا كان تيار الحلقة خارجاً من القطب الموجب للمصدر و سالباً إذا كان غير ذلك .

المصفوفة $[R]$ هى مصفوفة مربعة $n \times n$ على الصورة

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & .... & R_{1i} & .... & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & .... & R_{2i} & .... & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & .... & R_{3i} & .... & R_{3n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ R_{i1} & R_{i2} & .... & R_{ii} & .... & R_{in} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ R_{n1} & R_{n2} & .... & .... & R_{ni} & R_{nn} \end{bmatrix}$$

و تحتوى هذه المصفوفة على نوعين من العناصر هما

النوع الأول : العناصر التى تحمل إسم الحلقة مرتين $i = i$ ، R_{ii} ، R_{jj} ، و هى العناصر المكونة لقطر المصفوفة و هى تساوى مجموع المقاومات التى تغلق الحلقة ولها دائماً إشارة موجبة و يطلق عليها المقاومة الذاتية Self Resistance للحلقة

النوع الثانى : و هى العناصر التى تحمل إسم حلقتين R_{ij} حيث $i \neq j$ و هى المقاومة المشتركة بين الحلقة i و الحلقة j و يسرى بها كلاً التياران i ، j و تكون إشارتها موجبة إذا كان سريان التياران بها فى نفس الإتجاه . و سالبة إذا كان سريان التياران بها فى أتجاهين متضادين .

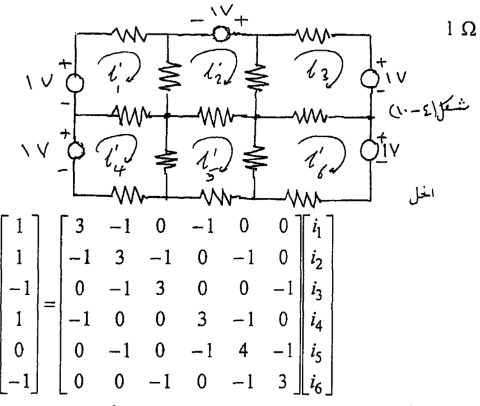
$$[i]^t = [i_1 \quad i_2 \quad ..... \quad i_i \quad ..... \quad i_n]$$

هى متجه التيارات المفروضة فى الحلقات و هى المجاهيل المطلوب الحصول عليها عند حل الدائرة .

مثال (٤-٦)

أكتب معادلات الدائرة المبينة فى شكل (٤-١٠) علماً بأن جميع المقاومات

1 Ω



شكل (٤-١٠)

الحل

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

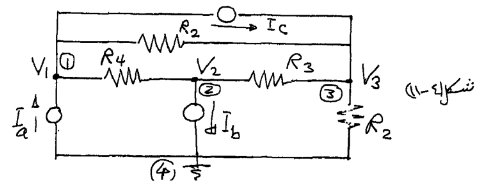
و يمكن الحصول على التيارات من حل المعادلة حيث يكون الحل على الصورة

$$[i] = [R]^{-1}[V]$$

٤-٤ الحل بإستخدام جهد العقدة :-

Node Voltage Equations

إذا كانت الدائرة تحتوى على عدد (n-1) عقدة فإننا نأخذ إحدى هذه العقد لتكون مرجعاً Reference node تنسب إليه جهود باقى العقد و تكون هذه الجهود هى المجاهيل التى نحصل عليها بحل الدائرة. ولإيضاح ذلك نأخذ الدائرة المبينة بشكل (٤-١١)



شكل (٤-١١)

تتكون الدائرة من أربعة عقد تتصل بينهما مصادر التيار و المقاومـــات بأختيـــار العقدة 4 كمرجع جهده صفر يكون لدينا ثلاث جهود للعقـــد V_1 ، V_2 ، V_3 و بتطبيق قانون كيرتشوف للتيار (KCL) عند كل عقدة تكون المعادلات الدائرة كـالأتى :-

عند العقدة (١)

$$I_a - I_c = \frac{V_1 - V_2}{R_4} + \frac{V_1 - V_3}{R_2}$$

عند العقدة (٢)

$$-I_b = \frac{V_2 - V_1}{R_4} + \frac{V_2 - V_3}{R_3}$$

عند العقدة (٣)

$$I_c = \frac{V_3}{R_1} + \frac{V_3 - V_1}{R_2} + \frac{V_3 - V_2}{R_3}$$

بوضع $G_i = \frac{1}{R_i}$ و إعادة ترتيب الحدود يمكن وضع المعادلات السابقة على الصورة .

$$\begin{aligned} I_a - I_c &= (G_2 + G_4)V_1 - G_4V_2 - G_2V_3 \\ -I_b &= -G_4V_1 + (G_3 + G_4)V_2 - G_1V_3 \\ I_c &= -G_2V_1 - G_3V_2 + (G_1 + G_2 + G_3)V_3 \end{aligned}$$

و نكتب هذه المعادلات على شكل مصفوفة كالأتى :-

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_3 + G_4) & -G_4 & -G_2 \\ -G_4 & (G_3 + G_4) & -G_3 \\ -G_2 & -G_3 & (G_1 + G_2 + G_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

و بحل المعادلات السابقة نحصل على المجاهيل V_1 ، V_2 ، V_3 .

و بصفة عامة إذا كانت الدائرة تحتوى على (n+1) عقدة فإننا يمكن أن نكتب عدد n معادلة مستقلة على الصورة .

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_i \\ \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_i & \dots & G_j & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2i} & \dots & G_{2j} & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{i1} & G_{i2} & \dots & G_{ii} & \dots & G_{ij} & \dots & G_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{j1} & G_{j2} & \dots & G_{ji} & \dots & G_{jj} & \dots & G_{jn} \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{ni} & \dots & G_{nj} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_j \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

أو

$$[i] = [G][V] \qquad (4\text{-}12)$$

حيث i_i هو مجموع مصادر التيار المتصلة بالعقدة i باعتبار التيار الداخل للعقدة موجب و التيار الخارج من العقدة سالب الإشارة .

G_{ii} ، G_{jj} ، ...... المواصلات التى تحمل إسم عنده مرتين و هى تمثل مجموع المواصلات المتصلة بالعقدة و تكون دائماً موجبة الإشارة و تعرف بالمواصلة الذاتية للعقدة Self Conductance .

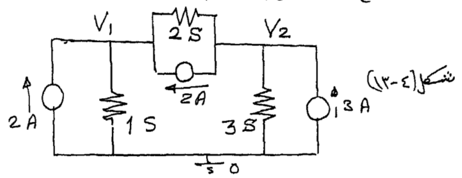
G_{ij} ، $(V \neq j)$ هى مجموع المواصلات المتصلة بصورة مباشرة بين العقدتين i ، j و تعرف بالمواصلة المتبادلة بينهما Mutual Inductance و تكون إشارتها سالبة إذا كان V_1 ، V_j لهما نفس الإشارة بالنسبة للعقدة الموجبة و هذا الوضع هو الذى تفرض على جميع الجهود فى كل الأحوال .

V_i هى جهود العقد و هى المجاهيل التى تحصل عليها بحل المعادلات و بمعرفتها نحصل على جهود و تيارات عناصر الدائرة .

مثال (٤-٧)

الدائرة المبينة فى شكل (٤-١٢)

لحل الدائرة بإستخدام معادلات جهد العقدة يلزم أولا تحويل مصدر الجهد إلى مصدر تيار لتصبح كما فى شكل (٤-١٣)



و تكون معادلات الدائرة .

$$\begin{bmatrix} 2+2 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

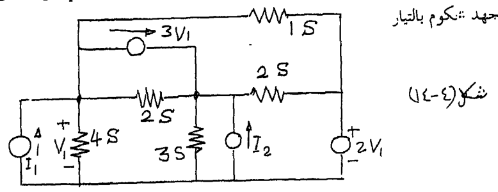
و منها

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

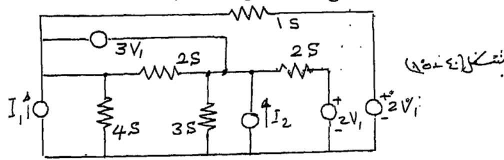
أى أن $V_1 = 2 \ \text{v}$ ، $V_2 = 1 \ \text{v}$

مثال (٤-٨)

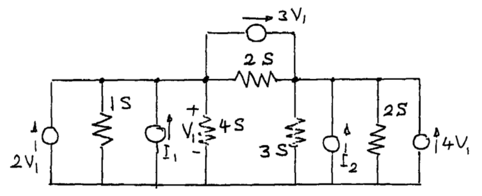
الدائرة المبينة فى شكل (٤-١٤) تحتوى على مصدر تيار محكوم بالجهد V_1 و مصدر جهد محكوم بالتيار



و لحل الدائرة بإستخدام جهد العقدة يلزم تحويل مصدر الجهد $(2V_1)$ إلى مصدر تيار و كذلك لابد من تعديل الدائرة لتصبح كما فى شكل (٤-١٥)



ثم يتم تحول مصادر الجهد إلى مصادر تيار لتصبح الدائرة كما فى شكل (٤-١٦) .



و تكون المعادلات التى تصف الدائرة على الصورة

$$\begin{bmatrix} I_1 + 2V_1 - 3V_1 \\ I_2 + 3V_1 + 4V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+2 & -2 \\ -2 & 2+3+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

ثم بإعادة ترتيب المتغيرات نحصل على المعادلات التى تربط المتغيرات V_1 ، V_2 بالمصادر المستقلة I_1 ، I_2 كالأتى :-

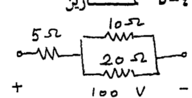
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

و منها نحصل على قيمة الجهد V_1 ، V_2 حيث

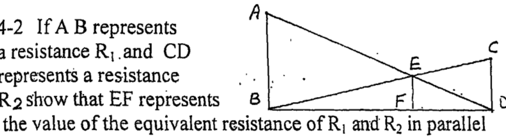
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

٤-٥ تمـــــارين

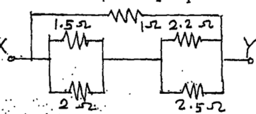
4-1 In the circuit shown calculate the power in each resistance and the voltage across the 5 Ω resistance



4-2 If A B represents a resistance R_1 and CD represents a resistance R_2 show that EF represents the value of the equivalent resistance of R_1 and R_2 in parallel

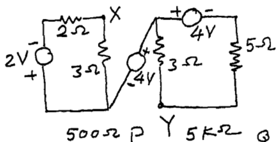


4-3 Find graphically and check by calculations the resistance between X Y.



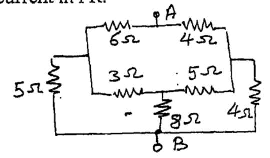
4-4 Two resistors R_1 and R_2 are 2.5 KΩ and 4 KΩ repressively. The two resistors are connected in series to a 100 v supply. The voltage across R_1 and R_2 are measured successively by a voltmeter having a resistance of 50 KΩ find the sum of the two readings.

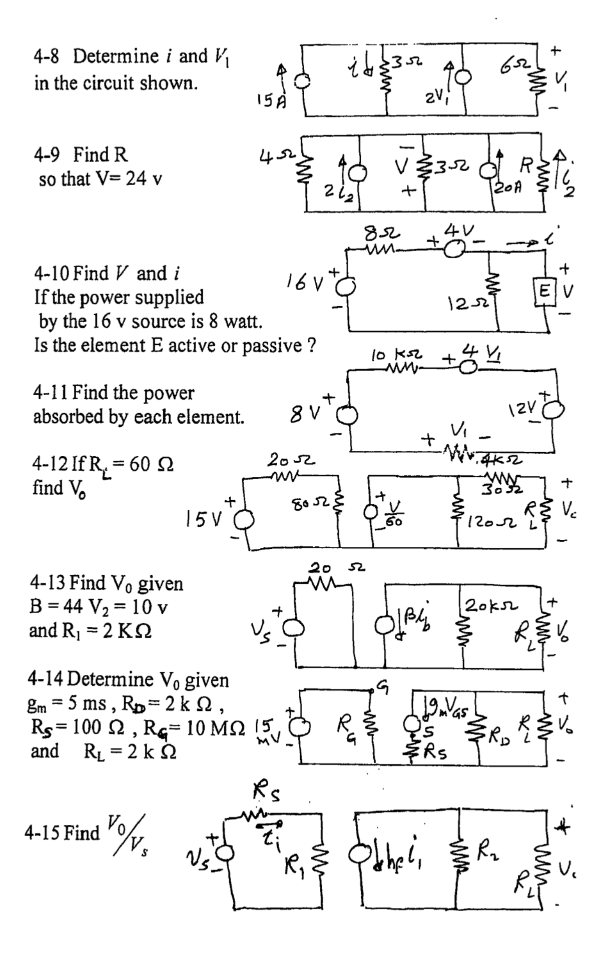
4-5 Calculate the difference of potential between points X and Y in the circuit shown.



4-6 Determine (a) the current given by the battery (b) the p.d across RS (c) the magnitude and directions of the current in PR.

4-7 Determine the resistance between points A and B in the network shown.





4-8 Determine i and V_1 in the circuit shown.

4-9 Find R so that V= 24 v

4-10 Find V and i If the power supplied by the 16 v source is 8 watt. Is the element E active or passive ?

4-11 Find the power absorbed by each element.

4-12 If $R_L = 60\ \Omega$ find V_o

4-13 Find V_0 given $B = 44$ $V_2 = 10$ v and $R_1 = 2\ K\Omega$

4-14 Determine V_0 given $g_m = 5$ ms , $R_D = 2\ k\ \Omega$, $R_S = 100\ \Omega$, $R_G = 10\ M\Omega$ and $R_L = 2\ k\ \Omega$

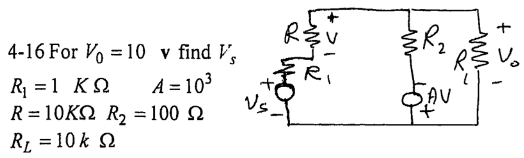
4-15 Find V_0/V_s

4-16 For $V_0 = 10$ v find V_s

$R_1 = 1\ K\Omega \quad A = 10^3$

$R = 10K\Omega\ R_2 = 100\ \Omega$

$R_L = 10\,k\ \Omega$

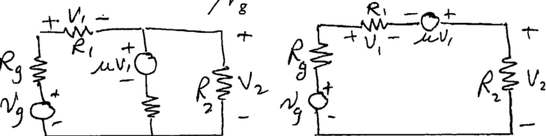


4-17 Repeat problem 4-16 with the same values except for
$R = 10^5\Omega\ A = 10^5$ what is the value of V_s if $A \to \infty$

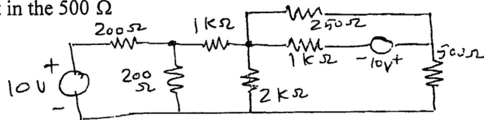
4-18 find the voltage across the 2 Ω resistance using a) loop analysis b) node analysis

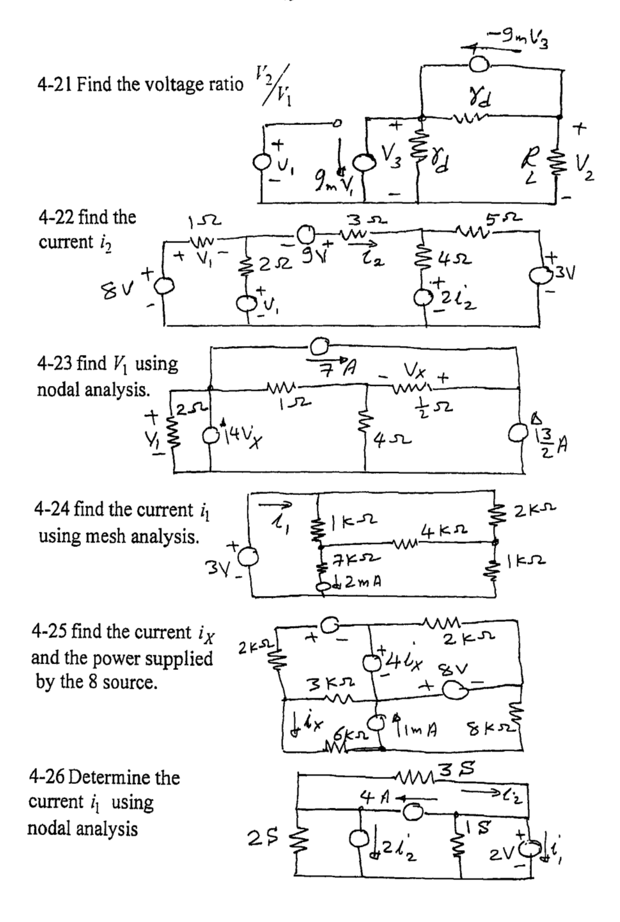
4-19 determine I_1 and I_2 using
a) Loop analysis.
b) node analysis.

4-20 determine the ratio V_2/V_g for the two circuits shown.



4-21 Use either mesh analysis or nodal analysis to find the current in the 500 Ω





4-21 Find the voltage ratio V_2'/V_1'

4-22 find the current i_2

4-23 find V_1 using nodal analysis.

4-24 find the current i_1 using mesh analysis.

4-25 find the current i_X and the power supplied by the 8 source.

4-26 Determine the current i_1 using nodal analysis

الفصل الخامس

حل الدوائر

التى تحتوى عناصر خازنة للطاقة

Solution of Circuits Containing Energy Storage Elements

رأينا فيما سبق أن المكثفات Capacitors و المحاثات Inductors عناصر مختزنة للطاقة و أن علاقات الجهد و التيار لهذه العناصر هى علاقات تفاضلية أو تكاملية و أن وجود هذه العناصر فى الدوائر يؤدى إلى معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة من

الدرجة النونية .

n^{th} order linear differential equations with constant coefficients .

على الصورة

$$an\frac{dx^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{dx_{(n-1)}}{dt^{n-1}}.........a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t)$$

حيث X متغير زمني عادة ما يعبر عن الجهد voltage او التيار current أو الشحنة chargeأو الفيض flux.

a_i ثوابت تعتمد على قيم العناصر R,L,C على فرض أن هذه القيم لا تتغير مـن الزمن .

$f(t)$ هى دالة تمثل تجمع خطى Linear combination لمصادر الجهد و مصادر التيار المستقلة فى الدائرة و أحياناً يطلق عليها دالة الإثارة للدائرة Excitation

وبحل الدائرة نحصل على المتغير X و عادة ما يطلق على هذا الحل استجابة الدائرة Response

و تتوقف درجة المعادلة على عدد و نوعية العناصر الخازنة للطاقة .

و الحل العام لهذا النوع من المعادلات يتكون من جزئين

الحل المكمل The complementary solution

الحل الخاص The particular solution

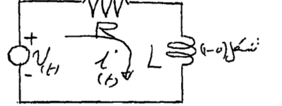
و يكون الحل العام The general solution هو مجموع الحلين . و سوف نتعرض فيما يلى لبعض الحالات البسيطة .

٥-١ دوائر الدرجة الأولى First order circuits

و هذه الدوائر تحتوى على عنصر واحد من العناصر الخازنة للطاقة و أى عدد من المقاومات و بتطبيق قانون كيرتشوف KCL ، KVL على هذه الدوائر تنتج معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى . و تكون على الصورة .

$$a_1 \frac{dx_{(t)}}{dt} + a_0 x_{(t)} = f_{(t)} \qquad (5-1)$$

حيث $f_{(t)}$ هى الإثارة الخارجية المؤثرة فى الدائرة ، $x_{(t)}$ هى استجابة الدائرة لهذه الإثارة .



مثال (٥-١)

الدائرة المبينة فى شكل (٥-١) تحتوى على عنصر واحد خازن للطاقة هو المحاثة L و مقاومة R, و مصدر جهد $V_{(t)}$ يمثل الإثارة Excitation للدائرة . و التيار $i_{(t)}$ هو إستجابة الدائرة Response لهذه الإثارة و بتطبيق KVL على هذه الدائرة نجد أن

$$i_{(t)}R + L\frac{di_{(t)}}{dt} = V_{(t)}$$

و هى معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى على الصورة (٥-١) حيث

$$a_0 = R \qquad , a_1 = L$$

و إذا كانت $f_{(t)}$ مساوية للصفر تكون المعادلة (٥-١) على الصورة المتجانسة .

Homogenous first order diff. Eqn.

$$a_1 \frac{dx_t}{dt} + a_0 x = 0$$

و هذا النوع من المعادلات ينشأ عن الدوائر التى لا تحتوى على مصادر إثارة خارجية و تكون الإستجابة الناتجة ناشئة عن الحالة الإبتدائية Initial condition

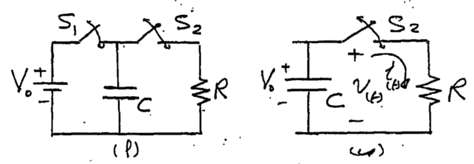
للدائرة .فمثلا فى الدائرة المبينة فى شكل (٥-١) اذا كانت $V_{(t)} = 0$ فإن معادلـــة الدائرة تصبح على الصورة .

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

و يكون التيار i المار فى بالدائرة ناشئاً عن الطاقة الإبتدائية المختزنة بالمحادثـــة فى صورة تيار إبتدائى initial current

٥-١-١ الإثارة بالحالة الإبتدائية

كمثال لهذا النوع من الدوائر نأخذ الدائرة المبينة بشكل (٥-٢)



شكل (٥-٢)

إذا كان المفتاح S_1 مغلقاً لفترة زمنية طويلة بينما يكون المفتاح S_2 مفتوحاً . فإن المكثف سوف يكون مشحوناً و يكون الجهد على طرفيه V_0 . فإذا فتحنا المفتاح S_1 ثم أغلقنـــا المفتاح S_2 عند اللحظة الزمنية $t = 0$ فإن الدائرة تصبح كما فى شـكل (٥-٢-ب)

وتكون الطاقة المختزنة فى المكثف عند هذه اللحظة هى $\frac{1}{2}cV_0^2$.

إبتداء من هذه اللحظة الزمنية و اللحظات التالية $t \geq 0$ تنتقل الشحنة من أحـد لوحى المكثف إلى اللوح الآخر عبر المقاومة R و يؤدى هذا إلى فقد فى الطاقة مقـــداره $i_{(t)}^2R$ و هذا الفقد فى الطاقة يقلل فرق الجهد بين طرفى المكثف و يقلل التيار حيـــث $i_{(t)} = {V_{(t)}}/{R}$ و يستمر ذلك حتى يصل الجهد بين طرفى المكثف و كذلك التيـــار إلى الصفر و المعادلات الرياضية لتغير الجهد $V_{(t)}$ و التيار $i_{(t)}$ نحصل عليها بتطبيـــق KVL على الدائرة حيث نجد أن

$$V_{(t)} + RC\frac{dV_{(t)}}{dt} = 0 \qquad t \geq 0$$

و هذه معادلة من الدرجة الأولى يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات

كالآتى Separation of Variables

$$\frac{dV_{(t)}}{dt} = -\frac{1}{RC}V_{(t)}$$

$$\frac{dV_{(t)}}{V_{(t)}} = -\frac{1}{RC}dt$$

بتكامل الطرفين:

$$L_n V_{(t)} = -\frac{1}{RC}t + K$$

أو

$$V_{(t)} = A\ e^{-t/Rc} \qquad \therefore t \geq 0$$

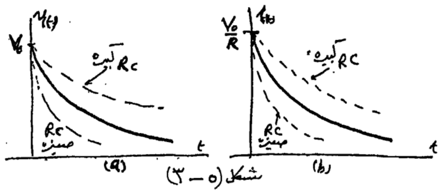
at $t = 0 \qquad V_{(t)} = V_0 \qquad \therefore A = V_0$

$$V_t = V_0 e^{-t/Rc} \qquad (5-2)$$

و كذلك التيار i

$$i_{(t)} = \frac{cdV_t}{dt} = \frac{V_0}{R}e^{-t/Rc} \qquad (5-3)$$

إذا رسمنا الجهد و التيار مع الزمن نحصل على الأشكال (٥-٣ -a) ، (٥-٣- b)

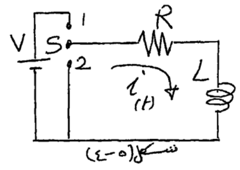


شكل (٥ — ٣)

و تعرف العلاقة (٥-٢) ، (٥-٣) بالتغير الأسى المضمحل للجهد و التيار

the decaying exponential variation of the voltage and current

و تتحكم قيمة حاصل الضرب Rc فى معدل إضمحلال الجهد أو التيار فإذا كانت قيمة Rc كبيرة كان الإضمحلال بطيئاً و إذا كانت قيمة Rc صغيرة كان الأضمحـــلال سريعاً .



شكل (٥-٤)

أيضاً فى الدائرة المبينة بشكل (٥-٤) و المكونة من مقاومة و محاثة . إذا كان المفتاح S فى الوضع 1 لفترة زمنية طويلة ثم نقلناه فجأة للوضع 2 عند اللحظة الزمنية $i = 0$ فإنه بتطبيق قانون كيرتشوف KVL تكون معادلة التيار

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0 \qquad t \geq 0$$

و يكون حل المعادلة على الصورة

$$i = Be^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\text{at} \quad t = 0 \qquad i = V/R$$

$$i_{(t)} = \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (5\text{-}4)$$

و هى نفس الصورة الأسية المضمحلة كما فى العلاقـــات (٥-٢) ، (٥-٣) حيـــث يعتمد معدل الإضمحلال فى هذه الحالة على القيمة $\left(L/R\right)$

٥-١-٢ خواص الدالة الأسية المضمحلة

The decaying Exponential function

عرفنا أن دوائر الدرجة الأولى RL ، RC كلاهما يمكن وصفه بمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى على الصورة

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0$$

و ذلك عندما تكون الدائرة تحت تأثير الحالة الإبتدائية فقـــط . و أن إســـتجابة الدائرة تكون على الصورة العامة

$$x = X_0 e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0 \qquad (5\text{-}5)$$

حيث x متغير يعبر عن الجهد أو التيار

X_0 هى القيمة الإبتدائية لهذا المتغير عند $t = 0$

τ مقدار ثابت يعرف بالثابت الزمنى Time constant ووجدنا أن قيمته تعتمد على عناصر الدائرة ففى الدوائر الحثية RL $\tau = L/R$ و فى الدوائر السعوية RC $\tau = RC$

يمكن كتابة الاستجابة فى العلاقة (٥-٥) على الصورة :

$$\frac{x}{X_0} = e^{-t/\tau}$$

ومنها نجد أنه عند $t = \tau$

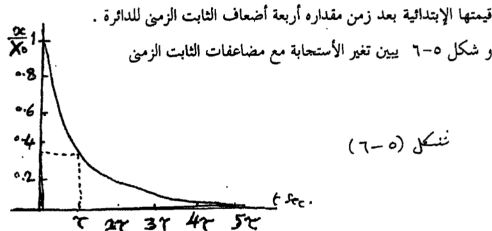
$$\frac{x}{X_0} = e^{-1} \cong 0.37$$

اى أن الأستجابة تصل إلى قيمة مقدارها 0.37 من قيمتها الإبتدائية بعد مرور زمن يساوى الثابت الزمنى للدائرة . أيضاً عند حساب قيمة الإستجابة بعد فترات زمنية مساوية لمضاعفات الثابت الزمنى نجدها عند القيم المبينة فى الجدول .

t/τ	0	1	2	3	4	5
$\frac{x}{X_0}$	1	0.37	0.14	0.05	0.018	0.0067

من القيم الموجودة فى بالجدول نجد أن الإستجابة قد وصلت قيمتها إلى أقل من 2% من قيمتها الإبتدائية بعد زمن مقداره أربعة أضعاف الثابت الزمنى للدائرة .

و شكل ٥-٦ يبين تغير الأستجابة مع مضاعفات الثابت الزمنى



شكل (٥-٦)

و مفهوم الثابت الزمنى له أهمية فى الدوائر الكهربية و بخاصة عند مقارنة إستجابات الدوائر المختلفة فمثلاً فى حالة الدائرة المكونة من مقاومة و مكثف فإن الثابت الزمنى $\tau = RC$. فاذا فرضنا أن هناك دائرة مكونة من مقاومة $R_1 = 100\Omega$ و مكثف سعته $C = 1000\ pF$ فإن $\tau_1 = 0.1\ \mu sec.$

و إذا فرضنا دائرة أخرى بها $R_2 = 100\Omega$ ، $C_2 = 10\ F$ فإن

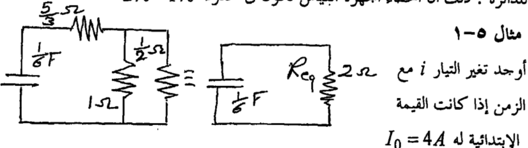
$\tau_2 = 1000\ sec$

و هذا معناه أنه فى الدائرة الأولى يقل التيار فيها إلى 37% من قيمته الإبتدائية بعد زمن مقداره 0.1 μsec بينما فى الدائرة الثانية يحتاج التيار إلى 1000 s أى حوالى 17 دقيقة ليهبط إلى نفس النسبة .

كما أننا نعتبر أن الإستجابة تصل إلى الصفر بعد زمن قدره أربعة أضعاف الثابت الزمنى للدائرة . ذلك أن أخطاء أجهزة القياس تكون فى حدود 1% - 2%

مثال ٥-١

أوجد تغير التيار i مع الزمن إذا كانت القيمة الإبتدائية له $I_0 = 4A$



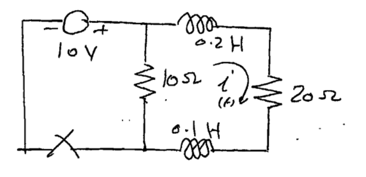
نلاحظ أن الدائرة بها مكثف واحد و لذلك فإنها تكون دائرة من الدرجة الأولى و يكون تغير التيار i على الصورة .

$$i = I_0 e^{-t/\tau}$$

و لتحديد قيمة الثابت الزمنى τ نضع الدائرة على صورة مكثف مع مقاومة واحدة و هى المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاثة المتصلة على طرفى المكثف و منها نحسب

$\tau = R_{eq}C = \frac{1}{3}$sec. و يكون تغير التيار

$$i = 4e^{-3t} Amp \qquad t \geq 0$$



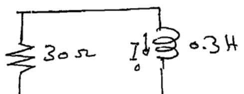
مثال (٥-٢)

أوجد تغير التيار $\left(i_{(t)}\right)$ مع الزمن للدائرة المبينة عند فتح المفتاح S بعد أن كان مغلقاً لفترة طويلة .

قبل فتح المفتاح S $t<0$ يمر تيار 1 A فى المقاومة 10 Ω و 0.5 A فى المقاومة 20 Ω و هذا التيار الأخير هو القيمة الإبتدائية للتيار $i_{(t)}$ لحظة فتح المفتاح S

$$I_0 = \frac{1}{2} A$$

أيضاً بعد فتح المفتاح نلاحظ أن المقاومة Ω 20, 10 على التوالى و كذلــــك المحاثــات 0.1 H , 0.2 H متصلتين على التوالى و تكون الدائرة كما بالشكل و هى من الدرجة الأولى و يكون تغير التيار على الصورة .



$$i_{(t)} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

حيث τ هى الثابت الزمنى $= \dfrac{L}{R} =$ **0.015** sec.

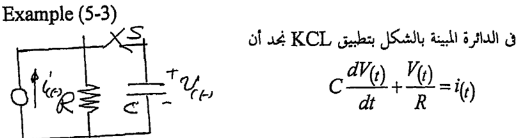
٥-١-٣ الإثارة بالمصادر

Excitation by sources

إذا كانت تغذية الدائرة تتم عن طريق مصادر مستقلة independent sources فإن الإستجابة الناتجة سوف تتحدد بقيمة المصدر و كذلك القيم الإبتدائية لتيار المحاثــة أو جهد المكثف فإذا كانت هذه القيم مساوية للصفر عند البداية = $(t=0)$ فإن الدائرة يطلق عليها إنها فى الحالـــة الصفريـــة Zero Initial conditions

و تكون الإستجابة ناشئة عن المصدر فقط و يطلق عليـــها إســـتجابة Zero State الحالة الصفرية Zero State response وتكون المعادلة (5-1) هى الـــتى تصـــف الدائرة

Example (5-3)



فى الدائرة المبينة بالشكل بتطبيق KCL نجد أن

$$C\frac{dV_{(t)}}{dt}+\frac{V_{(t)}}{R}=i_{(t)}$$

و هى معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى على الصورة (5-1) و تختلف عـــن الحالـــة السابقة فى وجود الدالة $i_{(t)}$ حيث $i_{(t)}$ دالة فى الزمن و ليست دالة فى $v_{(t)}$ أو مشتقاته.
الحل فى هذه الحالة يتكـــون مـــن جزئـــين . الجـــزء الأول يعـــرف بـــالحل المتمـــم Complementary solution و نحصل عليه من حل المعادلة

$$C \qquad + \qquad = 0$$

و بنفس الطريقة السابقة يكون على الصورة الأسية المضمحلة

$$V_{c(t)}=Ke^{-t/RC} \qquad (5\text{-}7)$$

و لا يعتمد على الإثارة المسلطة على الدائرة .

الجزء الثانى من الحل و يعرف بالحل الخاص Particular Solution و هذا الحل لـــه طبيعة ذات صورة خاصة من دالة الإثارة المسلطة على الدائرة فمثلاً إذا كانت دالة الإثارة ثابتة أى أن $i_{(t)}=I$

فى هذه الحالة يكون الحل الخاص على صورة مقدار ثابت أى نفرض أن

$$V_{p(t)}=A$$

و للحصول على علاقة A بالدائرة نعوض بهذا الحل فى معادلة الدائرة فنجد أن

$$\frac{1}{R}A=I$$

$$V_{p(t)}=A=IR \qquad (5\text{-}8)$$

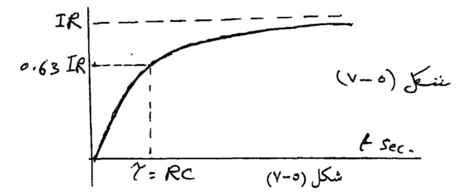
و يكون الحل العام هو مجموع الحلين (2-7) ، (2-8) اى أن

$$V_{(t)} = V_{c(t)} + V_{p(t)}$$
$$= Ke^{-t/RC} + IR \qquad (5\text{-}9)$$

و للحصول على قيمة K نعوض فى (5-9) بالحالة الإبتدائية حيث $V_{(t)} = 0$ عنـــد $t = 0$ فنجد أن $k = -IR$ و الحل العام هو

$$V_{(t)} = RI\left(1 - e^{-t/ec}\right) \qquad t \geq 0$$

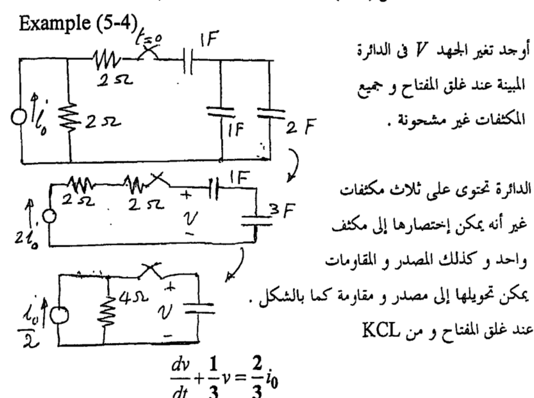
ويكون تغير جهد المكثف مع الزمن كما فى شكل (٥-٧)



شكل (٥-٧)

Example (5-4)

أوجد تغير الجهد V فى الدائرة المبينة عند غلق المفتاح و جميع المكثفات غير مشحونة .



الدائرة تحتوى على ثلاث مكثفات غير أنه يمكن إختصارها إلى مكثف واحد و كذلك المصدر و المقاومات يمكن تحويلها إلى مصدر و مقاومة كما بالشكل .

عند غلق المفتاح و من KCL

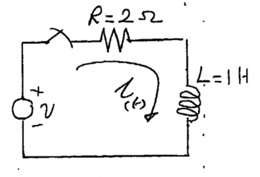
$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{3}v = \frac{2}{3}i_0$$

و يكون الحل

$$v_{(t)} = 2i_0\left(1 - e^{-t/3}\right)$$

Example (5-5)

اوجد التيار i فى الدائرة إذا كان المصدر على الصورة $v = 10\sin\omega t$



من KVL نجد أن معادلة الدائرة

$$iR + L\frac{di}{dt} = V_0 \sin\omega t$$

و يكون الحل المكمل

$$i_{(t)} = Ke^{-\frac{R}{L}t} = Ke^{-2t}$$

نفرض الحل الخاص على الصورة

$$i_{p(t)} = A\sin\omega t + \beta\cos\omega t$$

و بالتعويض فى معادلة الدائرة .

$$Lw(A\cos\omega t - \beta\sin\omega t) + R(A\sin\omega t + \beta\cos\omega t) = V_0\sin\omega t$$

بمساواة معاملات $\sin\omega t$ فى الطرفين

$$-L\omega B + RA = V_0$$

, بمساواة معاملات $\cos\omega t$ فى الطرفين

$$L\omega A + RB = 0$$

بحل المعادلتين الأخيرتين نحصل على B, A كالأتى

$$A = \frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \& \quad B = \frac{-\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

و بذلك نحصل على الحل العام

$$i_{(t)} = i_{c(t)} + i_{p(t)}$$

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}\sin\omega t - \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\cos\omega t$$

بالتعويض عن قيم $R = 2\pi$ ، $L = 1H$ ، $w = 1$ rad/sec.

$$i_{(t)} = Ke^{-2t} + 4\sin t - 2\cos t$$

لتحديد قيمة K نعوض بالحالة الإبتدائية عند $i = 0, t = 0$

$$K = 2$$

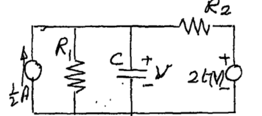
و يكون حل المعادلة

$$i_{(t)} = 2e^{-2t} + 4\sin t - 2\cos t$$

و الفروض المستخدمة لإيجاد الحل الخاص عادة ما تكون مشتقة من دالة الإثـــارة $f_{(t)}$ و بعض هذه الفروض مذكور فى الجدول التالى :-

Form of the excitation function	Form of the particular solution	
K	A	ثابت
Kt	$A + Bt$	درجة أولى
$K_0 + K_1 t$	$A + Bt$	درجة أولى
$K_0 + K_1 t + K_2 t^2$	$A + Bt + Ct^2$	درجة ثانية
Ke^{-bt}	Ae^{-bt}	
$K\sin bt$	$A\sin bt + B\cos bt$	
$K\cos bt$	$A\sin bt + B\cos bt$	

Example (5-6)

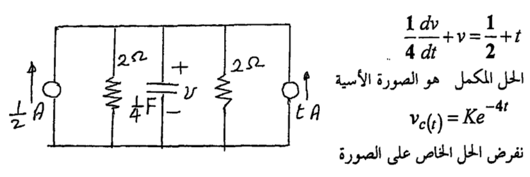


المطلوب حساب الجهد v عند $t > 0$

إذا كانت الدائرة فى الحالة الصفرية عند $t = 0$

$R_1 = R_2 = 2 \quad C = ¼ \text{ F}$

بتحويل مصدر الجهد إلى مصدر تيار تتحول الدائرة إلى الصورة المبينة بالشكل و بتطبيـــق KCL نحصل على معادلة الدائرة



$$\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}+v=\frac{1}{2}+t$$

الحل المكمل هو الصورة الأسية

$$v_{c(t)}=Ke^{-4t}$$

نفرض الحل الخاص على الصورة

$$v_p=A+Bt$$

بالتعويض فى معادلة الدائرة

$$\frac{1}{4}B+A+Bt=\frac{1}{2}+t$$

و بمساواة معاملات t فى الطرفين نحصل على

$$A=\frac{1}{4} \qquad , \quad B=1$$

و يكون الحل العام

$$v_{(t)}=Ke^{-4t}+\frac{1}{4}+t$$

من الحالة الابتدائية عند $t=0$ تكون $v=0$ نحصل على $K=-\frac{1}{4}$ و يكون

$$V_{(t)}=\frac{1}{4}\left(1-e^{-4t}\right)+t$$

٥-١-٤ الإثارة بالمصادر و الحالة الإبتدائية :-

Excitation by sources and initial conditions

و الحل فى هذه الصورة هو نفس خطوات الحل فى الحالة السابقة إلا أنــــه عنــد تحديد الثابت نضع قيم الحالة الإبتدائية بدلاً مــــن الصفــر فمثــلاً فى المثـــال الأخــير Example(5-6) إذا كان المكثف مشحوناً بجهد مقداره V_0 عند $t=0$ فاننـــا نعوض بهذه القيم فى الحل العام للحصول على الثابت K حيث نجد أن

$$V_0=K+\frac{1}{4}$$

$$K = V_0 - \frac{1}{4}$$

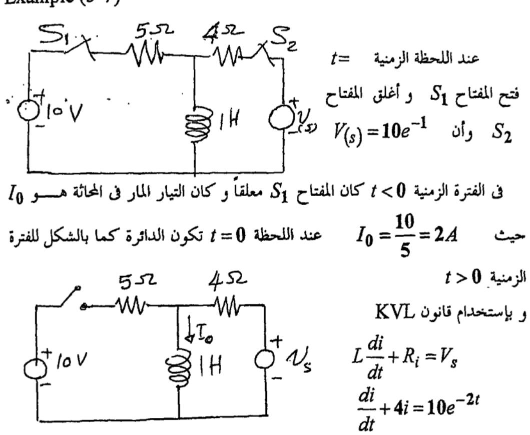
و يكون حل الدائرة فى هذه الحالة

$$v(t) = V_0 e^{-4t} + \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4t}\right) + t$$

نلاحظ أن هذا الحل هو مجموع حلين أحدهما $V_0 e^{-4t}$ و هو الحل الذى نحصل عليه فى حالة عدم وجود المصادر فى الدائرة و تكون الإثارة الناشئة عن الحالة الإبتدائية فقط
Zero Input response

و الحل الثانى $\frac{1}{4}\left(1 - e^{-4t}\right) + t$ هو الحل الذى نحصل عليه عند إثارة الدائرة بالمصادر الخارجية فقط Zero state Response

Example (5-7)



عند اللحظة الزمنية $t =$ فتح المفتاح S_1 و أغلق المفتاح S_2 وأن $V_{(s)} = 10e^{-1}$

فى الفترة الزمنية $t < 0$ كان المفتاح S_1 معلقاً و كان التيار المار فى المحاثة هو I_0 حيث $I_0 = \frac{10}{5} = 2A$ عند اللحظة $t = 0$ تكون الدائرة كما بالشكل للفترة الزمنية $t > 0$

و بإستخدام قانون KVL

$$L\frac{di}{dt} + R_i = V_s$$

$$\frac{di}{dt} + 4i = 10e^{-2t}$$

الحل المكمل

$$i_{c(t)} = Ae^{-4t}$$

نفرض الحل الخاص على الصورة .

$$i_p = Be^{-2t}$$

بالتعويض فى المعادلة

$$-2Be^{-2t} + HBe^{-2t} = 10e^{e-2t}$$
$$B = 5$$
$$i_p = 5e^{-2t}$$

و الحل العام هو

$$i_{(t)} = Ae^{-4t} + 5e^{-2t}$$

, للحصول على الثابت A نعوض بالحالة الإبتدائية حيث $i = 2$ عند $t = 0$

فنجد أن $A = -3$ و يكون الحل

$$i_{(t)} = -3e^{-4t} + 5e^{-2t}$$

٥-١-٥ دالة الخطوة the step function

لاحظنا فى الأجزاء السابقة أننا ندخل المصادر إلى الدوائر او نخرجها عند اللحظة $t = 0$ بواسطة إغلاق أو فتح مفاتيح متصلة بالدائرة من ذلك مثلاً تسليط مصدر جهد ثابت عند اللحظة $t = 0$ بين النقطتين A, B كما فى شكل (٥-٨)

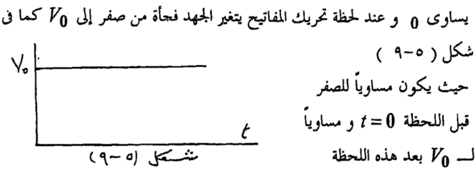
و هذا يتطلب إغلاق المفتاح S_1

و فى نفس اللحظة فتح المفتاح S_2

و هذا معناه أنه قبل تحريك المفاتيح

فإن الجهد بين النقطتين B A

يساوى 0 و عند لحظة تحريك المفاتيح يتغير الجهد فجأة من صفر إلى V_0 كما فى شكل (٥-٩)



شكل (٥-٩)

حيث يكون مساوياً للصفر قبل اللحظة $t = 0$ و مساوياً لـ V_0 بعد هذه اللحظة

و يطلق على هذه الدالة دالة الخطوة Step function و إذا كانت قيمة الدالة مساوية للوحدة فإنها تعرف بدالة خطوة الوحدة The unit step و يطلق عليها $U_{(t)}$ و دالة وحدة الخطوة $U_{(t)}$ هى دالة رياضية ليس لها أبعاد و إذا أردنا تمثيل الجهد V_0 (شكل ٥-٩) فإنه يكتب على الصورة

$$v_{(t)} = V_0 U_{(t)}$$

حيث :-

$$U_{(t)} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

و إذا كان التغيير عند $t = t_0$ فإن دالة وحدة الخطوة تكون معرفة كالآتى

$$U_{(t-t_0)} = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \qquad (5\text{-}12)$$

$V(U_{t} - t_0)$

$i(U_{t} - t_0)$

شكل (٥-١٠)

و على ذلك فإننا يمكن أن نستخدم الرمز المبين فى شكل (٥-١٠) للدلالة على أن الجهد v أو التيار i تم تسليطه على الدائرة فى اللحظة الزمنية $t = t_0$

مثال ذلك إذا نظرنا إلى الدائرة المبينة فى شكل (٥-١١)

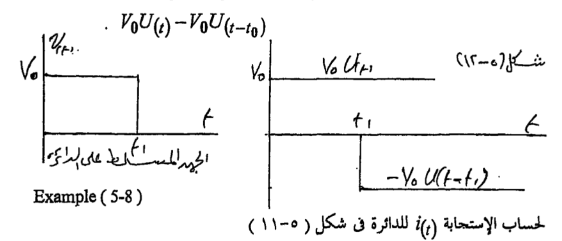
(1) $V_0\, U_{(t)}$ — R — $i_{(t)}$ — L — (2) $V_0\, U_{(t-t_0)}$

شكل (٥-١١)

نجد انه عند $t < 0$ يكون الجهد المسلط على الدائرة مساوياً للصفر

عند $t = 0$ تصبح قيمة المصدر (1) مساوياً V_0 بينما قيمة المصدر (2) تستمر صفر و يكون الجهد على الدائرة مساوياً لـ V_0 عند $t = t_1$ يكون الجهد نتيجة للمصدر (1) V_0 و يصبح الجهد نتيجة للمصدر (2) $-V_0$ و يكون الجهد على الدائرة مساوياً

للصفر مرة أخرى و شكل (٥-١٢) يوضح ذلك حيث نجد أن الجهد المسلط على الدائرة يكون على شكل نبضة إتساعها t_1 و ارتفاعها V_0 و هى تساوى $V_0U_{(t)} - V_0U_{(t-t_0)}$.



Example (5-8)

لحساب الإستجابة $i_{(t)}$ للدائرة فى شكل (٥-١١)

نجد أنها مكونة من جزءين i_1 ، i_2 هى الإستجابة نتيجة للمصدر $V_0U_{(t)}$ فقط و i_2 هى الإستجابة نتيجة للمصدر $V_0U_{(t-t_0)}$ فقط و لحساب i_1 نجد أن

$$i_{1c} = Ae^{-\frac{R}{c}t} \qquad \text{(الحل المكمل)}$$

$$i_{1p} = \frac{V_0}{R} \qquad \text{(الحل الخاص)}$$

و بعد التعويض بالحالة الإبتدائية نجد

$$i_1 = \frac{V}{R}\left(1 - e^{\frac{R}{L}t}\right) \qquad \text{(الحل العام)}$$

بالمثل

$$-i_2 = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right)$$

و يكون التيار i هو مجموع $i_1 + (-i_2)$ مع ملاحظة الفترات الزمنية المختلفة .

$$i_{(t)} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad o < t < t_0$$

$$i_{(t)} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) - \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right)$$

$$= \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\left(e^{\frac{Rt_0}{L}} - 1\right) \qquad Amp \qquad t > t_0$$

٥-١-٦ الحالات الإبتدائية فى الدائرة فى الدوائر

Initial Conditions in networks

رأينا ان معادلات الدوائر تكون على صورة معادلات تفاضلية و أن حلول هذه المعادلات يحتوى على عدد من الثوابت حسب درجة المعادلة . و لتحديد قيم هذه الثوابت لابد من وجود معلومات إضافية عن الدوائر . و قد أتفق على أن تكون هذه المعلومات هى قيم المتغيرات أو مشتقاتها عند لحظة التغيير بفتح أو غلق المفاتيح عند بداية حساب الزمن $t = 0$ و تعرف هذه القيم بالشروط الإبتدائية Initial Conditions أو الحالة الإبتدائية للدائرة Initial State .

كما يمكن أيضاً إستخدام الشروط النهائية عند $t = \infty$ و تعرف بالحالة النهائية finial Conditions

و تعتمد الشروط الابتدائية للدائرة على حالة الدائرة قبل اللحظة الزمنية $t = 0$ أى عند $t = 0-$ و كذلك على مكونات الدائرة بعد $t = 0$ أى عند $t = 0+$ و لتحديد الشروط الإبتدائية يجب ان نراعى حالة كل عنصر كالأتى :-

أ - المقاومات : يتناسب التيار المار فى المقاومة مع فرق الجهد بين طرفيها . و على ذلك فإن أى تغير فجائى فى التيار يمكن أن يصحبه تغير فجائى فى الجهد و إيضاً اى تغير فجائى فى الجهد يصحبه تغير فجائى فى التيار .

ب - المحاثة : من علاقة الجهد و التيار فى المحاثة نجد ان التيار لا يمكن أن يتغير تغيراً فجائياً اذا كانت L ثابتة و بالتالى فعند تسليط مصدر جهد على محاثة لا يؤدى إلى

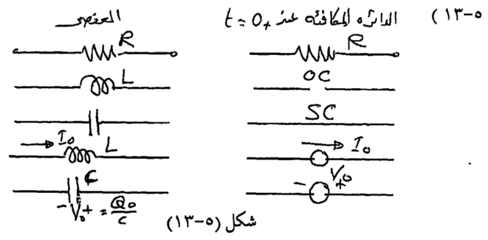
مرور تيار و إذا كان هناك تيار إبتدائى I_0 فإنه يستمر بنفس القيمة و تكون المحاثة فى هذه الحالة كما لو كانت مصدراً للتيار I_0

جـ - المكثف : لا يمكن للجهد بين طرفى المكثف أن يتغير تغيراً فجائياً .

فإذا وصل المكثف إلى مصدر للطّاقة فإن الجهد بين طرفيه لا يتغير فجأة و لكن يمر تيار لحظى فى المكثف و يكون كأنه دائرة قصر Short Circuit . فإذا كان المكثف مشحوناً بشحنة Q_0 فإنه يعمل فى هذه اللحظة كما لو كان مصدراً للجهد قيمته

$$V_0 = \left(Q_0/C\right)$$

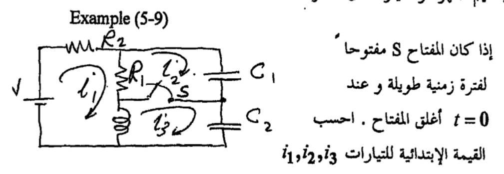
و يمكن تلخيص تصرفات العناصر المختلفة عند الحالة الإبتدائية كما فى شكل (٥-١٣)



شكل (٥-١٣)

و لتحديد الحالة الإبتدائية للدائرة نبدأ بإحلال كل عنصر بالدائرة المكافئة له و حساب قيم الجهود و التيارات فى الدائرة .

Example (5-9)



إذا كان المفتاح S مفتوحاً لفترة زمنية طويلة و عند $t = 0$ أغلق المفتاح . احسب القيمة الإبتدائية للتيارات i_1, i_2, i_3

قبل غلق المفتاح مباشرة عند اللحظة $t = 0-$ تكون قيم التيارات كالأتى

$$i_{30-} = 0 \quad ، i_{20-} = 0 \quad ، i_{10-} = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

كما أن المكثف C_1 يكون مشحوناً للجهد V_{0c1} والمكثف C_2 يكون مشحوناً للجهد V_{0c2} حيث :-

$$V_{0C1} = \frac{VR_1}{R_1 + R_2}\frac{C_1}{C_1 + C_2} , V_{0C2} = \frac{VR_1}{R_{1+R_2}}\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

بعد إنغلاق المفتاح مباشرة عند اللحظة $t = 0+$ تكون الدائرة كما فى الشكل .

و تكون القيمة الإبتدائية للتيارات كالآتى :-

$$i_{10+} = i_{10-} = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

$$i_{30+} = 0$$

$$i_{2o+} = i_{1o+} - \frac{V_{co1}}{R_1}$$

$$= \frac{V}{R_1 + R_2} - \frac{V}{R_1 + R_2}\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$= \frac{V}{R_1 + R_2}\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

مثال (٥-٩)

إذا كان تيار المحاثة عند $t = 0$ هو $-5A$. ما هى القيمة الإبتدائية للجهد V_L عند $t = 0+$

الدائرة المكافئة عند $t = 0+$ تكون كمابالشكل

نحسب V_2 ، V_1 فنجد أن

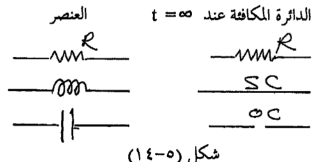
$$V_1 = 8v \qquad V_2 = 5v$$
$$V_{Lo+} = V_1 - V_2 = 8 - 5 = 3v$$

٥-١-٧ القيمة النهائية لمتغيرات الدائرة

Final Values of circuit Variables

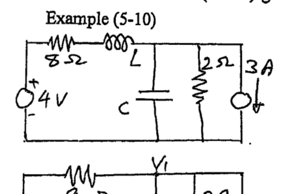
إذا كانت مصادر التغذية للدائرة ذات خرج ثابت مع الزمن أو إذا كانت المصادر متغيرة تؤول قيمتها إلى الصفر عند $t = \infty$. أو إذا كانت تغذية الدائرة بالحالات الابتدائية للمكثفات و المحاثات ، فى هذه الحالات نجد أن القيم النهائية لمتغيرات الدائرة يمكن الحصول عليها من العلاقات الأساسية حيث

$V_L = L\frac{dc_1}{dt}$ ، $i_c = c\frac{dvc}{dt}$ ، و إنه فى حالة الإستقرار تؤول إلى الصفر و تكون مكافئات العناصر كما فى شكل (٥-١٤)



شكل (٥-١٤)

Example (5-10)

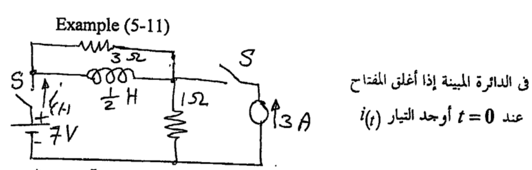


أوجد القيمة النهائية لجهد المكثف

تحسب القيمة النهائية لجهد المكثف من الدائرة بعد وضع مكافئات العناصر عند $t = \infty$ كما فى الشكل و بتطبيق قانونى كيرتشوف للتيار نحصل على

$$V_{o\infty} = V_1 = -4v$$

Example (5-11)



فى الدائرة المبينة إذا أغلق المفتاح

عند $t = 0$ أوجد التيار $i_{(t)}$

حيث أن الدائرة تحتوى على مصادر ثابتة فإنه يمكن حساب الإستجابة $L_{(t)}$ بمعرفة القيمة النهائية حيث أن القيمة النهائية فى هذه الحالة هى الحل الخاص أما الحل المكمل فنحصل عليه على الصورة الأسية المضمحلة بمعرفة الثابت الزمنى للدائرة .

و القيمة النهائية نحصل عليها من الدائرة المبينة

حيث $L_P = L_\infty = 4A$ و الحل المكمل

يكون على الصورة .

$$V_C = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

حيث $L = \frac{1}{2}H$ ، R هى المقاومة المكافئة لـ 1Ω و 3Ω على التوازى أى ان

$R = \frac{3}{4}$ و لحساب k نحسب الحالة

الإبتدائية للدائرة من الشكل المبين

حيث $L_{ot} = 1$

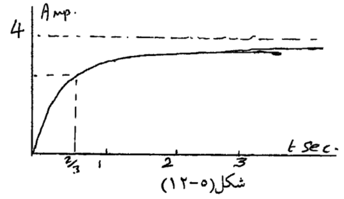
و تكون الإستجابة

$$i = 4 - 3e^{-\frac{3}{2}t}$$

نلاحظ أننا يمكن أن نحصل على نفس الحل بكتابة معادلة الدائرة على الصورة

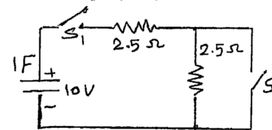
$$\frac{1}{2}L\frac{d_1}{d_2} + \frac{3}{4}i = 3$$

و يمكن رسم تغير التيار مع الزمن كما بالشكل .



شكل(٥-١٢)

Example (5-12)



إذا كان المكثف مشحوناً إلى جهد $10v$ و أغلق المفتاح S_1 و بعد 5 sec. أغلق المفتاح S_2

عند اغلاق S_1 بينما يظل S_2 مفتوحاً . تكون الدائرة RC من الدرجة الأولى حيث $R=5\Omega$ و $C=1F$ و تكون القيمة الإبتدائية للتيار

$$2A = i_{o+} = \frac{10}{5}$$

$$i_{(t)} = 2e^{-t/5}$$

بعد إغلاق المفتاح S_2 تخرج المقاومة 2.5Ω من الدائرة و يبقى $R`C$ من الدرجة الأولى $R`=2.5\Omega$ ، $C=1F$ و تكون علاقة التيار .

$$i_{(t)} = ke^{-\frac{(t-5)}{2.5}} \qquad t>5$$

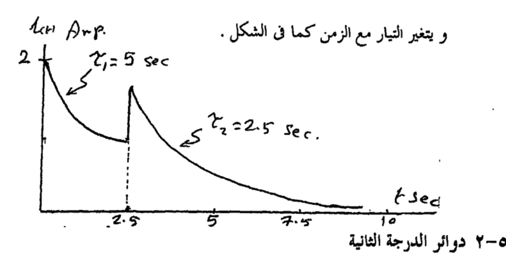
و لحساب K نحسب قيمة الجهد على المكثف عند $t=5$ sec. حيث .

$$V_{5-} = V_{5+} = 3.68v$$

و يرتفع التيار عندئذ إلى القيمة $\frac{3.68}{2.5} = 1.472A$ و يكون تغير التيار مع الزمن على الصورة .

$$i_{(t)} = 1.472e^{-\frac{t-5}{2.5}} \qquad t>5$$

و يتغير التيار مع الزمن كما فى الشكل .



٥-٢ دوائر الدرجة الثانية

Second Order Circuits

و هى الدوائر التى يمكن وصفها بمعادلات تفاضلية من الدرجة الثانية و هى فى الغالب تحتوى على عنصرين من العناصر الخازنة للطاقة الإضافية إلى اى عدد من المقاومات و المصادر . وهناك ثلاثة أحوال ممكنة لهذه الدوائر

(أ) الدوائر التى تحتوى على مكثفين Circuits with two capacitors

(ب) الدوائر التى تحتوى على ملفى حث Circuit with two inductors

(جـ) الدوائر التى تحتوى على ملف حث واحد و مكثف واحد circuits with one inductor and one capacitor و هذه الأنواع الثلاثة تؤدى إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية على الصورة .

$$a_2 \frac{d2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F_{(t)} \qquad \textbf{(5-12)}$$

و من أمثلة ذلك الدائرة المبينة فى شكل (٥-١٤) بتطبيق KVL و كتابة معادلات التيارات i_1 ، i_2 نجد أن نجد أن

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 - R_1 i_2 = v_{(t)} \qquad \textbf{(5-13)}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2) i_2 + R_1 i_1 = 0 \qquad \textbf{(5-14)}$$

من معادلة (٥ - ١٤) نجد أن :-

$$i_1=\frac{1}{R_1}\left[L_2\frac{d}{dt}+\left(R_1+R_2\right)\right]i_2$$

بالتعويض عن i_1 فى المعادلة (٥-١٣) نحصل على

$$\frac{L_1L_2}{R_1}\frac{di_2^2}{dt^2}+\left[L_1\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)+L_2\right]\frac{di_2}{dt}+i_2R_2=U_{(t)}$$

و هى معادلة من الدرجة الثانية فى i_2 على الصورة (٥-١٢)

أيضاً إذا نظرنا إلى الدائرة المبينة فى شكل (٥-١٥) نجد أن معادلات الدائرة على الصورة

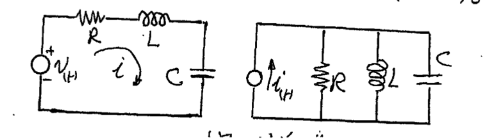
$$6v_1-4v_2+3\frac{dv_1}{dt}=i \qquad (5-15)$$

$$4v_2-4v_1+4\frac{dv_2}{dt}=0 \qquad (5-16)$$

بالتعويض فى (٥-١٥) عن قيمة v_1 نحصل على معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية فى المتغير v_2 على الصورة .

$$3\frac{d_2v_2}{dt^2}+\text{[illegible]}\frac{dv_2}{dt}+2v_2=i$$

و كذلك الدوائر التى تحتوى على عنصرين خازنين للطاقة من نوعين مختلفين أى تحتوى على مكثف واحد و ملف حث واحد تؤدى إلى معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية . و من الأشكال المألوفة لهذه الدوائر دائرة RLC توالى و دائرة RLC توازى كما فى شكل (٥-١٦)



فبالنسبة لدائرة التوازى نجد أن

$$C\frac{d_2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=\frac{di}{dt}$$

و بالنسبة لدائرة التوالى نجد أن

$$L\frac{d_2v}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{c}=\frac{dv}{dt}$$

و هى جميعاً معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية على الصورة (٥-١٢) و الحل العام لهذه المعادلة يتكون من جزئين . نحصل على الجزء الأول و هو الحل المكمل من المعادلة المتجانسة .

$$a_2\frac{d_2x}{dt^2}+a_{1x}+a_o=0 \qquad (5-17)$$

حيث نفرض الحل الصورة الأسية $X_t=Ke^{st}$ حيث S,K ثوابت حقيقية أو تخيلية أو مركبة .

بالتعويض بالحل فى المعادلة (٥-١٧)

$$a_2S^2ke^{st}+a_1ske^{st}+a_oke^{st}=0$$

$$a_2s^2+a_1S+a_o=0$$

و تعرف هذه المعادلة بالمعادلة المميزة characteristic equation و لها جذران على الصورة

$$S_1,S_2=-\frac{a_1}{2a_2}\pm\frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1{}^2-4a_oa_2}$$

ومن ذلك نجد أنه يوجد حلان

$$X_1=k_1e^{s_1t} \quad , \quad X_2=K_2e^{s_2t}$$

و يكون

$$X=X_1+X_2$$
$$=K_1e^{S_1t}+K_2e^{s_2t}$$

و تعتمد طبيعة الجذور على القيمة $\sqrt{a_1^2 - 4a_o a_2}$ فقد تكون الجذور حقيقية او تخيلية على حسب قيمة a_1^2 بالمقارنة مع $4a_o a_2$ و هذا يودى إلى ثلاثة أنواع من الحلول كالأتى :-

الحالة الأولى و فيها $a_1^2 > 4a_o a_2$

و يكون الجذران سالبان و غير متساويان و مثال ذلك الدائرة المبينة بالشكل حيث

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int V dt = V$$

و بتفاضل الطرفين

$$L\frac{d_2 i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

المعادلة المميزة char. eqn.

$$S^2 + 3S + 2 = 0$$

$$S_1 = -1 \qquad , \qquad S_2 = -2$$

$$i_{(t)} = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

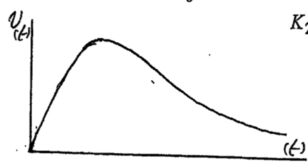
يمكن حساب K_1, K_2 بمعرفة الحالة الإبتدائية للدائرة

فإذا كانت $i_{1o} = 0$ ، $\left(\frac{di}{dt}\right)_o = 1$

فإن $k_{1=1}$ ، $K_2 = -1$

و $i = e^{-t} : e^{-2t}$

وتكون شكل الإستجابة

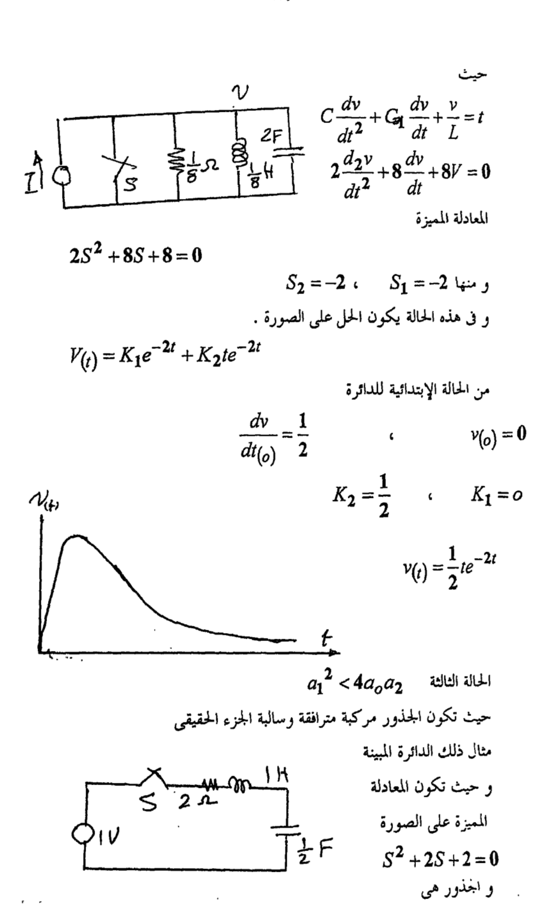


الحالة الثانية : $a_1^2 = 4a_o a_2$

حيث يكون الجذران حقيقيين متساوين و سالبين .

و مثال ذلك الدائرة المبينة بالشكل .

حيث



$$C\frac{dv}{dt^2}+G_1\frac{dv}{dt}+\frac{v}{L}=t$$

$$2\frac{d_2v}{dt^2}+8\frac{dv}{dt}+8V=0$$

المعادلة المميزة

$$2S^2+8S+8=0$$

و منها $S_1=-2$ ، $S_2=-2$

و فى هذه الحالة يكون الحل على الصورة .

$$V_{(t)}=K_1e^{-2t}+K_2te^{-2t}$$

من الحالة الإبتدائية للدائرة

$$v_{(o)}=0 \quad ، \quad \frac{dv}{dt_{(o)}}=\frac{1}{2}$$

$$K_1=o \quad ، \quad K_2=\frac{1}{2}$$

$$v_{(t)}=\frac{1}{2}te^{-2t}$$

الحالة الثالثة $a_1^2<4a_oa_2$

حيث تكون الجذور مركبة مترافقة وسالبة الجزء الحقيقى

مثال ذلك الدائرة المبينة

و حيث تكون المعادلة

المميزة على الصورة

$$S^2+2S+2=0$$

و الجذور هى

$$S_1 = -1 + j1 \quad , \quad S_2 = -1 - j1$$

$$i_{(t)} = K_1 e^{(-1+j)t} + K_2 e^{(-1-j)t}$$

$$= e^{-t}\left(K_1 e^{jt} + K_2 e^{-jt}\right)$$

بإستخدام علاقة أويلر

$$e^{\pm jt} = \cos \pm j \sin t$$

$$i_{(t)} = e^{-t}\left(K_3 \cos t + K_4 \sin t\right)$$

حيث

$$K_3 = K_1 + K_2 \quad , \quad K_4 = j\left(K_1 - K_2\right)$$

بإستخدام الحالة الإبتدائية .

$$i_o = 0 \quad , \left(\frac{d_1}{dt}\right)_o = 1$$

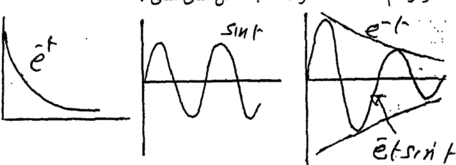
نحصل على

$$K_3 = o \quad , \quad K_4 = 1$$

ويكون الحل على الصورة

$$i_{(t)} = e^{-t} \sin t$$

و رسم هذه العلاقة موضحة بالشكل التالى التالى :-



هذا بالاضافة إلى وجود حالة خاصة وذلك عندما تكون $a_1 = 0$ فى العلاقة (٥-٨) حيث تكون الجذور فى هذه الحالة تخيلية

$$S_1 = jw \quad , \quad s_2 = -jw$$

و يكون الحل على شكل دالة جيبية ثابتة الإتساع .

أيضاً نحصل على الحل الخاص للمعادلة (٥-١٢) حسب الدالة $F_{(t)}$ مجموعاً عليه الحل الخاص .

مثال للحالة الخاصة الدائرة المبينة بالشكل حيث نجد للمعادلة التفاضلية على الصورة

$$\frac{d_2 i_{(t)}}{dt^2} + \frac{1}{Lc} i_{(t)} = 0$$

إذا كانت $L = 1H$ ، $C = \frac{1}{5}F$ تصبح المعادلة

$$\frac{d_2 i_{(t)}}{dt^2} + 5 i_{(t)} = 0$$

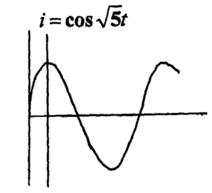
و تكون جذور المعادلة المميزة تخيلية $\pm j\sqrt{5} = \pm j\sqrt{1/Lc}$

ويكون الحل .

$$i_{(t)} = K1 \cos\sqrt{5}t + K_2 \sin\sqrt{5}t$$

إذا كانت الحالة الإبتدائية $i = 1$ ، $i = 0$ ، فالتعويض نحصل على $K_1 = 1$

و التيار $K_2 = 0$



وفى هذه الحالة يكون التيار على شكل دالة جيبية ذات تردد $w = \sqrt{5} red/tec$ و يعرف هذا التردد بالتردد الطبيعى the natural frequency wo.

و هذا يحدث فى الدوائر التى لا تحتوى على مقاومات و تحتوى على عناصر خازنة للطاقة من نوعين مختلفتين حيث تكون الإستجابة دالة متذبذبة oscillating

و كمثال للدوائر المثارة بمصادر نأخذ الدائرة المبينة بالشكل مع أعتبار القيم

$v = t/3$ ، $C = \frac{1}{5}F$

$L = 1H$ $R = 6$

فى هذه الحالة تكون المعادلة التى تصف الدائرة

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 6\frac{dv_c}{dt} + 5v_c = \frac{5}{3}t \qquad t \geq 0$$

الحل المكمل للمعادلة

$$v_{c(t)} = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-5t}$$

نفرض الحل الخاص على الصورة

$$v_p c_{(t)} = A + Bt$$

بالتعويض فى المعادلة الأصلية وبمطابقة المعاملات

$$A = -\frac{2}{5} \qquad , \qquad B = \frac{1}{3}$$

. يكون الحل العام للمعادلة

$$v_{c(t)} = K_1 e^{-t} + K_2 c^{-5t} + \frac{t}{3} - \frac{2}{5} \qquad t \geq 0$$

بتطبيق الحالة الإبتدائية

$$v_{c(o)} = 0 \quad , \qquad v'_{c(o)} = 0$$

نحصل على الحل المقابل الكامل

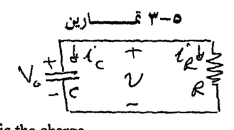
$$v_{c(t)} = \frac{5}{12}e^{-t} - \frac{1}{60}e^{-5t} - \frac{2}{5} - \frac{t}{3} \qquad t \geq 0$$

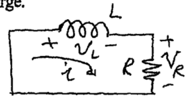
و يمكن الحصول على تيار الدائرة أيضاً من العلاقة

$$i_{(t)} = i_{c(t)} = c\frac{dv_{c(t)}}{dt}$$

٥-٣ تمـــــارين

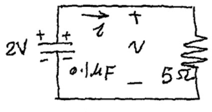
5.1 For the circuit shown find $i_{c(t)}$, $i_{p(t)}$ and $q_{(t)}$ in terms of R, C and V_o . V_o is the initial voltage on the capacitor. And $q_{(t)}$ is the charge.



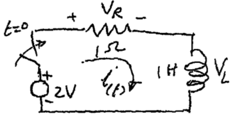


5.2 Find $V_{L(t)}, V_{R(t)}$ and (t) in terms of R, L and I_o, where is the flux linkage and I_o is the initial current in the inductor.

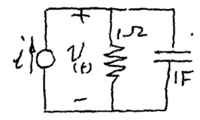
5-3 Find for $t > 0$ $i_{(t)}, q_{(t)}, v_{(t)}$. The power $P_{(t)}$ dissipated and the energy stored $W_{(t)}$.



5-4 Find an expression for the following quantities. \
A) $i_{(t)}$. B) flex linkage (t)
C) $v_{L(t)}$ D) energy stored in the inductor $W_{L(t)}$ E) $v_{R(t)}$
F) $P_{L(t)}$ power delivered to the inductor G) power dissipated by resistance $P_{W(t)}$ H) $P_{(t)}$ power supplied by the source



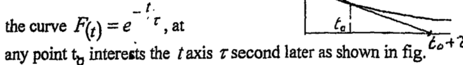
5-5 For the circuit shown find V (t) $t \geq 0$. if $V_{(o)} = 0$
And (a) $i = 1A$ (b) $i = tA$
i = $t^2 A$



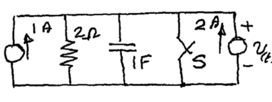
5-6 Repeat prob. (5-5) with $V_{(o)} = 1v$ & $i = 1 + t + t^2$ A

5-7 Report prob. (5-5) with $i = \cos t$ A

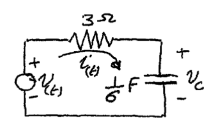
5-8 Show that the tangent to the curve $F_{(t)} = e^{-t/\tau}$, at any point t_0 interests the t axis τ second later as shown in fig.



5-9 In the circuit shown the switch S opens at $t = 0$, find $V_{(t)}$ for $t \geq 0$



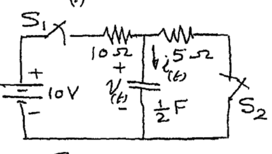
5-10 If the voltage $v_{(t)}$ is changed from **1v** to **2v** at $t = 0$



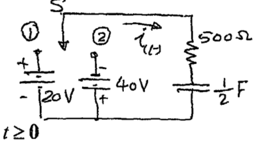
i) find an expression for the voltage across the capacitor

ii) find an expression for the current $i_{(t)}$ $t \geq 0$

5-11 S_1 is closed at $t = 0$ and S_2 is closed at $t = 3s$ find $v_{(t)}$ and $i_{(t)}$ assuming $V_{(0)} = 0$



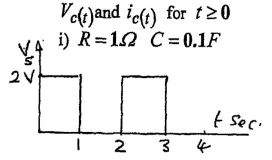
5-12 In the circuit shown, the switch is closed to position (1) At $t = 0$ and is moved to position. (2)After one time constant.

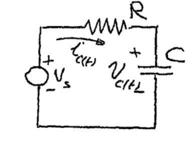


Find the current $i_{(t)}$ $t \geq 0$

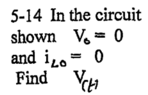
5-13 The input to the circuit is a square wave shown. sketch $V_{c(t)}$ and $i_{c(t)}$ for $t \geq 0$

i) $R = 1\Omega$ $C = 0.1F$

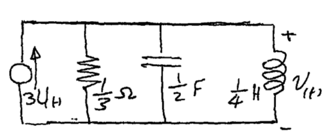




ii) $R = 1\,\Omega \qquad C = 1\,F$



5-14 In the circuit shown $V_o = 0$ and $i_{Lo} = 0$ Find $V_{(t)}$



الفصل السادس

حل الدوائر
ذات المصادر الجيبية فى الحالة المستقرة

Sinusoidal
Steady State analysis

إذا وصلت مصادر ذات شكل موجى على هيئة دالة جيبية Sine wave إ
دائرة ذات عناصر خطية فإنه بعد إنتهاء فترة الظواهر العـــابرة Transients . ووصو
الدائرة إلى حالة الإستقرار Steady state تصبح جميع الجـــهود voltagesو التيـــارا
currents فى الدائرة على شكل دوال جيبية تختلف عن دالة المصدر فقط فى الإتســـاع
زاوية الوجه . ذلك أن الدوال الجيبية لا يتغير شكلها بـــالجمع و الطـــرح أو بعمليـــا
التفاضل و التكامل .

بالإضافة إلى هذه المميزات الرياضية فإن الدوال الجيبية تتولد كثيراً فى الطبيعة و من أمثلة
ذلك حركة البندول و القوة الدافعة الكهربية المتولدة فى موصل يقطع مجال مغناطيسى ف

حركة دائرية و هى المولدات المستخدمة فى توليد الطاقة الكهربية لتغذية المنازل و المصانع عند تردد ٥٠ هرتز .

و تعرف الدوائر فى هذه الحالة بدوائر التيار المتردد (AC)

٦-١ عناصر الدوائر فى التيار المتردد .

٦-١-١ عنصر المقاومة

Resistance in Alternating Current circuits

إذا تم تسليط مصدر جهد جيبى $v = V_m \sin wt$ على مقاومة R يكون التيار

$$i = \frac{V}{R} = \frac{Vm}{R} \sin wt = I_m \sin wt$$

حيث $I_m = V_m / R$

و بدلالة القيمة الفعالة لكل من التيار و الجهد فان $V = IR$

حيث $V = V_m / \sqrt{2}$

و $I = I_m / \sqrt{2}$

هما القيم. الفعالة للجهد و التيار على الترتيب .

كما أن القدرة المفقودة فى المقاومة

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = VI \quad \text{watt}$$

و نلاحظ أن متجه الجهد و التيار متفقان فى زاوية الوجه .

٦-١-٢ عنصر المحاثة

Inductance in alternating current

إذا مر تيار $i = I_m \sin(wt+\theta)$ فى ملف حث فإن الجهد بين طرفى الملف يكون

$$v = L\frac{di}{dt} = wI_m L\cos(wt+\theta)$$

و يمكن التعبير عن الجهد و التيار بالمتجهات

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\theta \quad ، \quad v = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle\theta + 90^\circ$$

و إذا أخذنا النسبة بين الجهد و التيار فإن

$$\frac{v}{I} = \frac{wLI\angle 90^\circ + \theta}{I\angle\theta} = wL\angle 90^\circ\ \Omega$$

و تكتب هذه النتيجة على صورة عدد تخيلي

$$\frac{V}{I} = jX_L = jwL\Omega$$

و تعرف X_L بالمفاعلة الحثية Inductive Reactance . فإذا عبرنا عن الجهد الجيبى بمتجه V و التيار الجيبى بمتجه I فإننا يمكن تغيير عنصر المحاثة من الحيز الزمنى إلى الحيز الترددى بإستخدام المتغيرات I,V ، jwL بدلا من L,i,v

و تكون العلاقة بين تيار المحاثة و الجهد بين طرفيها على الصورة .

$$V = jwLI$$

حيث يسبق الجهد التيار بزاوية مقدارها 90°

٦-١-٣ عنصر السعة . Capacitance in (AC)

إذا كان جهد المكثف $v = V_m \sin(wt + \theta)$ فإن التيار $i = c\frac{dv}{dt}$

أى أن $i = V_m wc \cos(wt+\theta)$

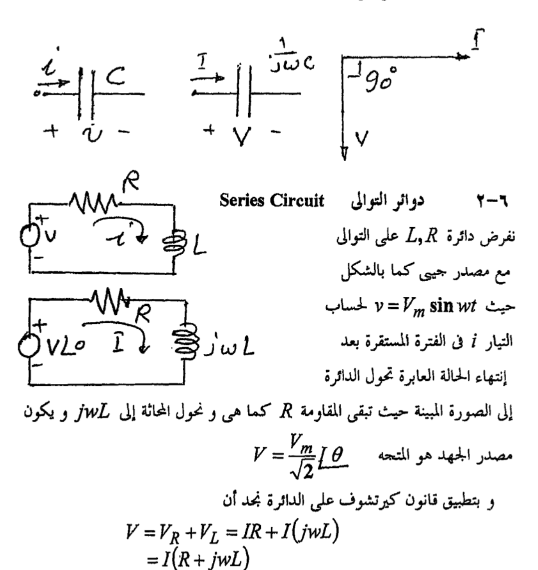
و تكون المتجهات المناظرة هى :-

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta \quad , \quad I = \frac{Im}{\sqrt{2}} \angle \theta + 90^\circ$$

و تكون النسبة بين الجهد و التيار

$$X_c = \frac{1}{wc} \quad , \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{jX_c} = -jwc$$

حيث X_c هى المفاعلة السعوية للمكثف بالأوم و بذلك يمكن التعامل مع المكثف فى الحيز الترددى بأخذ العلاقة بين متجه الجهد و متجه التيار .



٦-٢ دوائر التوالى Series Circuit

نفرض دائرة R, L على التوالى مع مصدر جيبى كما بالشكل حيث $v = V_m \sin wt$ لحساب التيار i فى الفترة المستقرة بعد إنتهاء الحالة العابرة تحول الدائرة إلى الصورة المبينة حيث تبقى المقاومة R كما هى و نحول المحاثة إلى jwL و يكون مصدر الجهد هو المتجه $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta$

و بتطبيق قانون كيرتشوف على الدائرة نجد أن

$$V = V_R + V_L = IR + I(jwL)$$
$$= I(R + jwL)$$

$$I=\frac{V}{R+jwL}=\frac{V}{\sqrt{R^2+W^2L^2}}\angle\arctan\frac{wl}{R}$$

فمثلاً إذا كانت $R=3\Omega$ ، $L=2H$ ، الجهد $V=20\sin 2t$

فإن $V=\frac{20}{\sqrt{2}}$ ، $X_L=wL=4\Omega$

و يكون التيار $I=\frac{20/\sqrt{2}}{3+j4}=\frac{4}{\sqrt{2}}\angle -53.1^\circ$

و فى الحيز الزمنى $i=4\sin(2t-53.1^\circ)$

و تكون العلاقة بين متجه الجهد و متجه التيار كما بالشكل

أيضاً إذا كان لدينا دائرة توالى مكونة من مقاومة و مكثف و مصدر جهد جيبى كما بالشكل . لحساب التيار i نضع مصدر الجهد على صورة متجه و تحول الدائرة إلى الحيز الترددى و نطبق KVL حيث

$$V=I\left(R+\frac{1}{jwc}\right)$$

$$\frac{50}{\sqrt{2}}\angle 10^\circ=I(8-j6)$$

$$I=\frac{50/\sqrt{2}\angle 10}{10\angle -36.9^\circ}A=\frac{5}{\sqrt{2}}\angle 46.9$$

و فى الحيز الزمنى يكون التيار

$$i=5\sin(2t+46.9)\ \text{A}$$

و نلاحظ أنه فى الدائرة الحثية يكون التيار متأخراً عن الجهد أما فى الدائرة السعوية فالتيار يسبق الجهد

مثال :-

دائرة مكونة من ملف حث و مقاومة

و مكثف على التوالى مع مصدر جهد جيبى .

نحول الدائرة إلى الحيز الترددى و نطبق قانون KVL للحصول على التيار . حيث

$$I = \frac{400/\sqrt{2}\ \angle 0^\circ}{400 + j200 - j500} = \frac{0.8}{\sqrt{2}} \angle 36.9^\circ\ A$$

و كدالة فى الزمن يكون التيار $i = 0.8\sin(2000t + 36.9)$

٦–٣ المعاوقة Impedance

يتضح مما سبق أن العلاقة بين الجهد و التيار فى الحالة المستقرة فى الدائرة التى تحتوى على مصادر جيبية تكون على الصورة . $V = IZ$

حيث Z كمية متجهة تأخذ الصورة العامة

$$Z = R + 5X$$
$$\sqrt{R^2 + X^2}\ \angle \arctan\frac{X}{R}$$

حيث R هى الجزء الحقيقى لـ Z و هى مقاومة الدائرة و X هى الجزء التخيلى لـ Z و تعرف بالمفاعلة Reactance ففى الدوائر الثلاث السابقة نجد أنه فى الدائرة الأولى

$$Z = 3 + j4$$
$$= 5\ \angle 53.1^\circ\quad \Omega$$

و فى الدائرة الثانية

$$Z = 8 - j6$$
$$= 10\ \angle -36.9^\circ\quad \Omega$$

و فى الدائرة الثالثة

$$Z = 400 + j200 - j500$$
$$= 400 - j300$$
$$= 500\ \angle -36.9^\circ\quad \Omega$$

و فى جميع الأحوال تم حساب التيار مباشرة بقسمة الجهد على المفاوقة

٦-٤ المسامحة Admittance

و هى كمية مركبة أيضاً و يرمز لها بالرمز Y و هى تساوى مقلوب المقاومة ووحداتها سيمنز (S) أو (℧)

$$Y = \frac{1}{z} = G + jB \qquad S$$

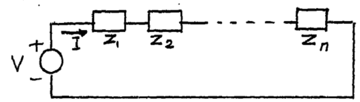
حيث G هى الجزء الحقيقى للمسامحة Y و يعرف بالتوصيلية أو للواصلة Conductance و B هى الجزء التخيلى للمسامحة و تعرف بالمهاودة Susceptance فمثلاً إذا كانت $Z = 3 + j4 \ \Omega$ فإن

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{3 + j4}$$

$$= \frac{3 - j4}{5} = 0.6 - j0.8 \qquad s$$

حيث $B = -0.8$ ، $G = 0.6\Omega$

٦-٥ توصيل المعاوقات على التوالى Impedances in Series



إذا وصلت مجموعة من المقاومات على التوالى فإن التيار المار بها جميعاً يكون I . و كنتيجة مباشرة لتطبيق KVL على الدائرة فإن $V = IZ$ حيث

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots\dots\dots\dots + Z_n$$

اى أن المعاوقة المكافئة هى مجموع المعاوقات

فإذا كانت

$$Z_1 = R_1 + jX_1 ، Z_2 = R_2 + jX_2 \ \dots\dots ، \dots\dots\dots Z_n = R_n + jX_n$$

فإن

$$Z = (R_{21} + R_2 + R_3 + ... + R_n) + j(X_1 + X_2 + ...X_n)$$

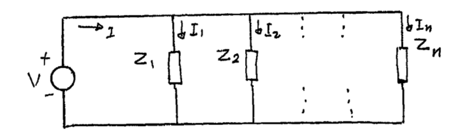
و يكون مقياس $|Z|$

$$|Z| = \sqrt{(R_{21} + R_2 + R_3 + ... + R_n)^2 + (X_1 + X_2 + ...X_n)^2}$$

و الزاوية ϕ

$$\phi = \arctan \frac{X_1 + X_2 + ... + X_2}{R_1 + R_2 .... + R_2}$$

٦–٦ توصيل المعاوقات على التوازى Impedances in Parallel



إذا تم توصيل مجموعة من المعاوقات على التوازى فإن الجهد على أطرافها جميعاً يكون متساوياً و التيار الكلى هو مجموع التيارات لكل معاوقة على حده و كنتيجة لتطبيق KCL نجد أن

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_n}$$

و بدلالة المسامحة Y نجد أن

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + ... + Y_n$$

و فى حالة توصيل معاوقتين فقط على التوزاى فإن المعاوقة المكافئة

$$Z = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

مثال : أوجد المعاوقة المكافئة

للدائرة المبينة بالشكل

الحـــــل :-

$$Z = 4 + j6 // 3 - j8$$
$$= 4 + \frac{(48 + j18)(3 + j2)}{(3 - j2)(3 + j2)}$$
$$= 12.3 + j11.5 \quad \Omega$$

وبذلك تكون مقاومة الدائرة هى الجزء الحقيقى للمعاوقة Ω **12.3** . كما أن مفاعلة الدائرة هى Ω **11.5** و هى موجبة الإشارة و هذا يعنى أن المعاوقة حثية .

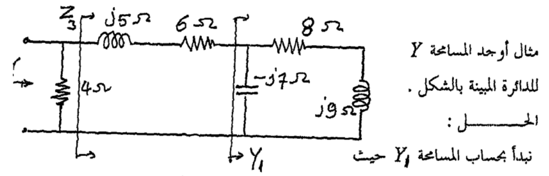
و يمكن رسم مخطط المعاوقة كما بالشكل حيث تمثل المقاومة الجزء الحقيقى و تمثل المفاعلة الجزء التخيلى .

و يكون مقياس Z

$$|Z| = \sqrt{(12.3)^2 + (11.5)^2} = 16.8 \quad \Omega$$

و الزاوية

$$\phi = \arctan\frac{11.5}{12.3}$$



مثال أوجد المساحة Y للدائرة المبينة بالشكل .

الحـــــل :

نبدأ بحساب المساحة Y_1 حيث

$$Y_1 = \frac{1}{-j7} + \frac{1}{8 - j9}$$
$$= \frac{8 + j2}{63 - j56}$$

نحسب المعاوقة Z_3 بإضافة مقلوب Y_1 إلى المقاومة $6 + j5$

$$Z_3 = 6 + j5 + \frac{63 - j56}{8 + j2} = \frac{101 - j4}{8 + j2}$$

المعاوقة Z_3 متصلة على التوازى مع المقاومة 4 فتكون المسامحة الكلية

$$Y = \frac{1}{4} + \frac{8+j2}{101-j4} = \frac{133+j4}{404-j16}$$

$$= \frac{133.1 \angle 1.72^\circ}{404.3 \angle -2.27} = 0.329 \angle 3.99^\circ$$

٦-٧ تحويلات Δ — Y ، ⅄ — Δ

(1) Z_A (2) Z_B Z_C (3)

(1) Z_1 (2) Z_2 Z_3 (3)

تتم تحويلات Δ — ⅄ ، ⅄ — Δ فى دوائر المعاوقات بنفس الطريقة التى تتبع فى حالة المقاومات .

فإذا أتصلت ثلاث مقاومات لتكون Δ بين ثلاث نقط 1,2,3 يمكن إستبدالها بثلاث معاوقات متصلة على شكل طبقاً لعلاقة شبيهة بما تم إستنتاجه فى حالة المقاومات وبنفس طريقة الإستنتاج حيث نجد الآتى :-

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

أيضا عند التحويل من ⅄ إلى Δ نجد أن

$$Y_A = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$Y_B = \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$Y_C = \frac{Y_2 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

كما يمكن كتابة التحويل الأخير على الصورة

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

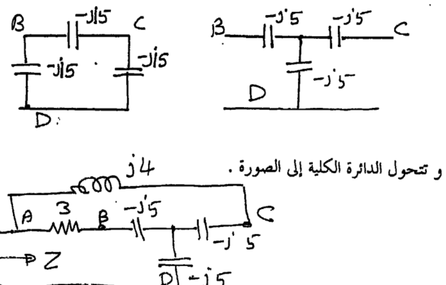
$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

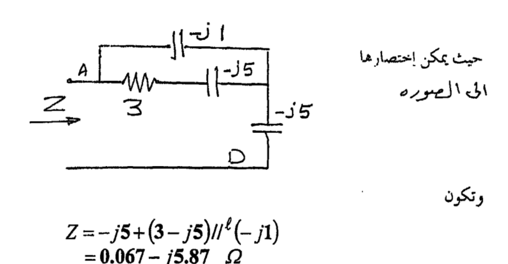
مثال : لحساب المعاوقة المكافئة في الدائرة نجد أنه يلزم عملى تحويل الدائرة ABCD من ⅄ إلى △ أو عمل تحويل للدائرة BCD من △ إلى ⅄ و نلاحظ أن التحويل الأخير يكون أيسر حيث نجد أن

$$Z_{\curlywedge} = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

و بذلك فإن



و تتحول الدائرة الكلية إلى الصورة .



حيث يمكن إختصارها
الى الصوره

وتكون

$$Z = -j5 + (3 - j5) // (-j1)$$
$$= 0.067 - j5.87 \quad \Omega$$

الطريقة العامة للتحليل بتيار الحلقة

The general method of loop current analysis

بتطبيق طريقة تيار الحلقة يمكن تسهيل عملية الحل بالاختيار المناسب لتيارات الحلقات وكما رأينا سابقا أن عدد المعادلات المستقلة فى هذه الطريقة هى b+-n +1 حيث b+ عدد أفرع الدائرة و n عدد العقد . ويمكن كتابة المعادلات على صورة مصفوفة على النحو التالى

$$[V] = [Z][I]$$

حيث

$$[V]^T = [v1 \quad v2 \ \cdots \ vi \ \cdots \ vj \ \cdots \ vn]$$

حيث vi هى المجموع الجبرى لمصادر الجهد العاملة فى الحلقة i حيث يكون جهد المصدر موجبا اذا كانت اقطابه بحيث تجعل تيار الحلقة يمر فى الاتجاه المفترض للتيار Ii

$$[I]^T = [I1 \quad I2 \ \ldots \ Ii \ \ldots \ Ij \ \ldots \ In]$$

هى تيارات الحلقات فى الدائرة والمطلوب أيجاد قيمها عند حل الدائرة و $[z]$ هى مصفوفة مربعة n*n على الصورة

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \dots & Z_{1i} & \dots & Z_{1j} \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \dots & Z_{2i} & \dots & Z_{2j} \dots & Z_{2n} \\ \vdots & - & - & - & - & - \\ Z_{i1} & Z_{i2} \dots & Z_{ii} & \dots & Z_{ij} \dots & Z_{in} \\ - & - & - & - & - & - \\ Z_{j1} & Z_{j2} \dots & Z_{ji} & \dots & Z_{jj} \dots & Z_{jn} \\ - & - & - & - & - & - \\ Z_{n1} & Z_{n2} \dots & Z_{ni} & \dots & Z_{nj} & Z_{nn} \end{bmatrix}$$

المعاوقة الذاتية للحلقة **The sell impedance of the loop**

وهى عناصر المصفوفة التى تحتل القطر وتحمل اسم الحلقة مرتين

Znn.........Zii........Z22.......Z11

وهى تمثل بمجموع المعاوقات التى تمر فى التيار المخصص للحلقة ويمكن حسابها من العلاقة.

$$Z_{ii} = \frac{V_i}{I_i} \qquad I_\gamma = 0$$

حيث $\gamma \neq i$ = 1 , 2 ., n.(i+1)`(i-1) وهذه المعاوقات تحمل اشاره موجبة دائما.

المعاوقة التبادلية The mutual impedance

المعاوقة التبادلية بين الحلقة i, الحلقة k وتعرف Zik $(I \neq k)$ هى مجموع المعاوقات المشتركة بين الحلقة i والحلقة k وتحمل كلا التيارين Ii,Ik وتكون سالبة إذا كان التياران متضادين وموجبة إذا كانا فى نفس الاتجاه

ويمكن تعريف zik بانها الجهد المستحث (induced voltage) فى الحلقة i نتيجة لمرور تيار واحد أمبير فى الحلقة k عندما تكون جميع التيارات ماعدا تيار الحلقة k مساوية للصفر اى تكون جميع الحلقات ماعدا الحلقة k مفتوحة.

$$Z_{ik} = V_i / I_k \qquad I_r = 0 \quad , \quad r \neq k$$

ويلاحظ انه اذا كانت الدائرة تحتوى على مصادر محكومة فيجب تمثيل هذه العناصر على صورة مصادر جهه محكومة بتيارات الحلقات.

وبتطبيق قاعدة كرامر لحل هذه المعادلات نجد ان التيار

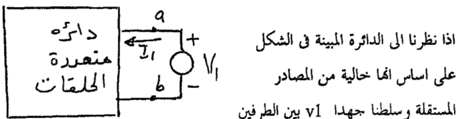
$$I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} \cdots V_i \frac{\Delta_{i1}}{\Delta_z} \cdots + V_j \frac{\Delta_{j1}}{\Delta_z} \cdots V_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta_z}$$

وعموما فان التيار

$$I_i = V_1 \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_z} + V_2 \frac{\Delta_{2i}}{\Delta_z} + \cdots V_i \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_z} + \cdots V_j \frac{\Delta_{ji}}{\Delta_z} \cdots + \cdots V_n \frac{\Delta_{ni}}{\Delta_z} .$$

حيث Δ_z هى محدد المصفوفة [z] ، Δ_{ij} هى محدد المصفوفة [z] بعد حذف الصف i والعمود j وتكون اشارته $(-1)^{i+j}$

معاوقة الدخول driving point impedance input impedance



اذا نظرنا الى الدائرة المبينة فى الشكل على اساس انها خالية من المصادر المستقلة وسلطنا جهدا v1 بين الطرفين ab فان التيار I1 يمكن الحصول عليه من العلاقة

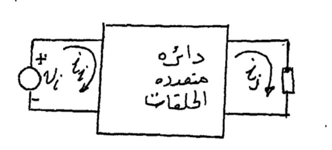
$$I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} + 0\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z}\right) + \cdots 0 + \cdots 0 + \cdots 0$$

وتعرف النسبة $\frac{V_1}{I_1}$ بانها معاوقة الدخول للدائرة بين الطرفين ab وهى

$$Z_{in} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} .$$

معاوقة الانتقال TRANSFER IMPEDANCE

اذا وجد مصدر جهد في احدى الحلقات i فانه يؤدى الى مرور تيارات في جميع الحلقات ويكون التيار



$$I_j = 0 \; \frac{\Delta_{1j}}{\Delta_z} + 0 \; .... V_i \; \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_z} + ... 0$$

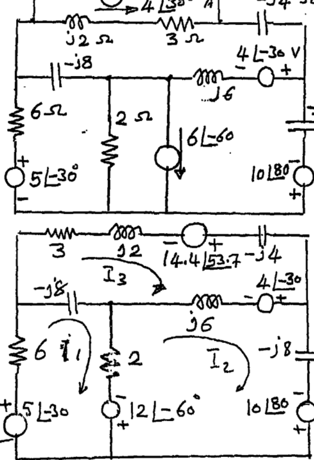
$$= V_i \; \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_z}$$

وتعرف النسبة $\frac{V_i}{I_j}$ بأنها معاوقة الانتقال للدائرة بين الحلقة i و الحلقة j أو هى النسبة بين الجهد المؤثر فى الحلقة i إلى التيار الذى يحدثه فى الحلقة j.

مثال :

اكتب معادلات تيار الحلقة للدائرة المبينه بالشكل.

يجب أولاً تحويل مصادر التيار إلى مصادر جهد



الدائرة بعد أن تم تحويل مصادر التيار إلى مصادر جهد.

$$\begin{bmatrix} 5\angle{-30^\circ} + 12\angle{-60} \\ 10\angle{80} + 4\angle{-30} - 12\angle{-16} \\ 14.4\angle{53.7} - 4\angle{-30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-j8+2 & -2 & -(-j8) \\ -2 & 2+j6-j8 & -j6 \\ -(-j8) & -j6 & 3+j2-j4+j6-j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 - j12.9 \\ -0.799 + j18.2 \\ 5.06 + j13.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-j8 & -2 & j8 \\ -2 & 2-j2 & -j6 \\ j8 & -j6 & 3-j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

مثال : أوجد

Z_{in}

Z_{12} ،

Z_{13} ،

معادلات الدائرة

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_z = 315\angle{16.2^\circ}$$

$$\Delta_{11} = 45.1\angle{24.9} \qquad \therefore Z_{in} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = 6.98\angle{-8.7}\,\Omega$$

$$Z_{12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{315\angle{16.2^\circ}}{(-1)\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{315\angle{16.2}}{21.8\angle{-16}} = 14.45\angle{32.2^\circ}\ \Omega$$

$$Z_{13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = 21\angle{16.2^\circ}\ \Omega.$$

اذا سلط على الدائرة السابقة جهد قدره $20\angle 30^\circ$ أوجد I1 ,I2 ,I3

$$I_1 = \frac{V}{Z_m} = \frac{20\angle 30^0}{6.98\angle -8.7^0} = 2.86\angle 38.7A.$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_{12}} = \frac{20\angle 30^0}{14.45\angle 32.2^0} = 1.396\angle -2.2^0 \ A$$

$$I_3 = \frac{V}{Z_{13}} = \frac{20\angle 30^0}{21\angle 16.3^0} = 0.952\angle 13.8^0 A.$$

التحليل باستخدام جهد العقدة . Node voltage analysis

باستخدام جهود العقد كمجاهيل للدائرة يمكن كتابة عدد من المعادلات قبل بمقدار واحد عن عدد العقد فى الدائرة وتكون الصورة العامة لهذه المعادلات

$$[I] = [Y]\ [V]$$

حيث :

$$[I]^T = [I_1 \quad I_2 \ \cdots \ I_i \ \cdots \ I_j \ \cdots \ I_n]$$

والتيار Ii هو مجموع قيم مصادر التيار الداخلة للعقدة I حيث يكون التيار الداخل موجبا والخارج سالبا .

و

$$[V]^T = [V_1 \quad V_2 \ \cdots \ V_n]$$

هى مجاهيل الدائرة وهى جهود العقد بالنسبة للعقدة المرجعية REFERENCE NODE

$[Y]$ هى مصفوفة المسامحات وهى مصفوفة مربعة N * N على الصورة .

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} \cdots Y_{12} \cdots Y_{1i} \cdots Y_{1n} \\ Y_{21} \cdots Y_{22} \cdots Y_{2i} \cdots Y_{2n} \\ Y_{i1} \cdots Y_{i2} \cdots Y_{ii} \cdots Y_{in} \\ Y_{n1} \cdots Y_{n2} \cdots Y_{ni} \cdots Y_{nn} \end{bmatrix}$$

وعناصر هذه المصفوفة تنقسم الى مجموعتين :

عناصر تحمل اسم العقدة مرتين Yii,Y22,Y11

وتعرف بالمساحة الذاتية للعقدة THE SELF ADM I TANCE OF NODE .

.

وهى تمثل مجموع المساحات المتصلة بالعقدة . وهى تحمل إشارة موجبة دائما .

وعناصر تحمل اسم عقدتين Y35,Y12, Yij وتعرف بالمساحة التبادلية MUTUAL ADMITTAANCE وهي تمثل مجموع المساحات المتصلة بين العقدتين . وتكون إشاراتها سالبة إذا كان جهد العقدتين له نفس القطبية بالنسبة للعقدة المرجعية

وبتطبيق قاعدة كرامر نجد أن :.

$$Yi = .I_1 \frac{\Delta ii}{\Delta y} + I_2 \frac{\Delta 2i}{\Delta y} ....I\ i \frac{\Delta ii}{\Delta y} + ...I\ n \frac{\Delta ni}{\Delta y}$$

مسامحة الدخول

INPUT ADMITTANCE
DRIVING POINT ADMITTANCE

.

اذا اخذنا دائرة خالية من العناصرالمستقلة ولها طرفين كما بالشكل,إذا سلطنا مصدرا للتيار بين الطرفين فان الجهد .

$$V_1 = I_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_y}$$

حيث تكون بقية الحدود صفر لعدم وجود مصادر سوى I_1 وتعرف مسامحة الدخول لهذه الدائرة بانها النسبة بين التيار الواصل بين الطرفين الى فرق الجهد المتولد عن هذا التيار

اى ان .

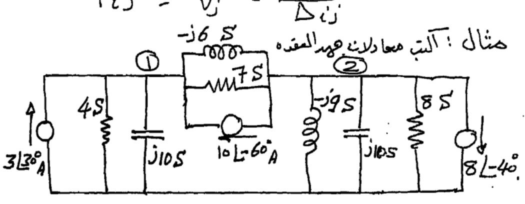
$$Y_{1n} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_{11}}$$

مسامحة لانتقال Transfer Admittance

إذا وصلنا مصدرا للتيار I_i عند أحدى العقد i بينها وبين العقدة المرجعية . فإن ذلك يؤدي إلى ظهور فرق جهد بين جميع العقد في الدائرة وبين العقدة المرجعية ونعرف مسامحة الانتقال بين العقدتين i و j بأنها النسبة بين التيار I_i والجهد المتولد عند العقدة j V_j عندما لا يكون في الدائرة مصادر مستقلة سوى مصدر التيار I_i أي أن

$$Y_{ij} = \frac{I_i}{V_j} = \frac{\Delta_y}{\Delta_{ij}}$$

مثال : أكتب معادلات جهد العقدة



معادلات الدائرة :

$$\begin{bmatrix} 3\angle 30^\circ + 10\angle -60^\circ \\ -10\angle -60^\circ - 8\angle -40^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + j10 - j6 + 7 & -(7-j6) \\ -(7-j6) & 7 - j6 + 8 - j9 + j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7.6 - j7.16 \\ -11.13 + j13.81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 + j4 & -7 + j6 \\ -7 + j6 & 15 - j5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

مثال

V1

10 Ω 2 Ω

50∠0 + −

j5 3 j4 −j10 Ω

$$\begin{bmatrix} \frac{50}{10} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0..-j0.2 & -0.5 \\ -0.5 & 0.62-j0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -0.5 \\ 0 & -0.62-j0.06 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.6-j0.2 & -0.5 \\ -0.5 & 0.62-j0.06 \end{vmatrix}} = 15.95\angle 49.9\ 4^0\ v$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.6-j0.2 & 5 \\ -0.5 & 0 \end{vmatrix}}{0.194L\ -55.5} = 12.9\angle 55.5\ ^0\ v$$

$$Y_{1n} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{0.194L-55.5}{0.62-j0.06} = 0.313\angle 49.94\ s$$

$$Y_{tran.12} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0.194L-55.5^0}{(-1)\ (-0.5)} = 0.388\angle -55.5^0$$

مثال

$\omega = 1$ rad/sec

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \alpha I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{jw} & -\frac{1}{jw} \\ 0 & -\frac{1}{jw} & jw+\frac{1}{jw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} s$$

$$I_1 = (V_1 - V_2)\ 0.5$$

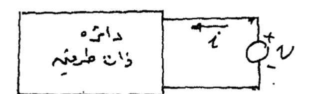
$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & (1.5-j) & -j \\ -0.5\alpha & 0.5\alpha+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = -j0.5(3+\alpha)$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1.5-j & -j \\ 0.5\alpha+1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-j(0.5\alpha+1)}{-j(3+\alpha)0.5} = \frac{2+\alpha}{3+\alpha}\,\Omega$$

power in the sinusoidal steady state القدرة .

اذا نظرنا الى دائرة ذات طرفين مسلط عليها جهد



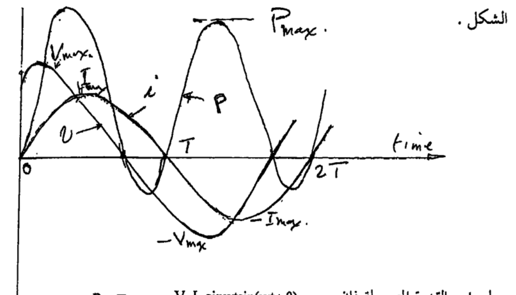
جيبى $v = V_m \sin(wt + \theta)$

وكان التيار $i = I_m \sin(wt.)$

حيث توجد زاوية وجه بين التيار والجهد مقدارها θ وهذه الزاوية تنحصر بين -90 و $+90$ للدوائر الخاملة وتكون القدرة اللحظية $p_{(t)} = vi$ اى

$$p_{(t)} = V_m \sin(wt + \theta) \quad * \quad I_m \sin wt.$$

فاذا رسمنا القيمة اللحظية للجهد والتيار . والقدرة مع الزمن فانها تبـــدو كمـــا فى الشكل .



ولحساب القدرة المتوسطة فان $p_{(t)} = V_m I_m \sin wt \sin(wt+\theta)$

و باستخدام العلاقة المثلثية $\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A - B) - \cos(A + B)\right]$

$$P_{(t)} = \frac{1}{2} V_m I_m \left[\cos\theta - \cos(2wt + \theta)\right]$$

ومنها نرى ان القيمة اللحظية للقدرة تتكون من جزئين : جزء ثابت مقداره $\frac{V_m I_m}{2}\cos\theta$ وجزء جيبى له ضعف تردد الجهد و التيار $-\frac{V_m I_m}{2}\cos(2wt+\theta)$ ومتوسط هذا المقدار يساوى صفر .

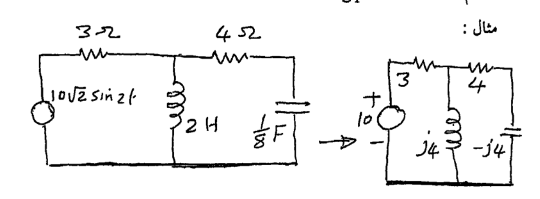
وعلى ذلك فان متوسط القدرة الداخلة للدائرة يساوى قيمة الجزء الثابت اى ان

$$P_{av} = P = \frac{V_m I_m}{2}\cos\theta = VI\cos\theta$$

ويلاحظ انه إذا كانت الدائرة خاملة فان $\cos.\theta$ يكون موجبا وتكون القدرة الداخلة موجبة أما إذا كان $\cos.\theta$ سالبا فان الدائرة تكون فعالة وتكون القدرة الداخلة سالبة أي أن الدائرة تكون مولدة للقدرة .

ويعرف $\cos.\theta$ بأنه معامل القدرة power factor و هو جيب تمام الزاوية بين متجه الجهد و متجه التيار و هى أيضا : زاوية المعاوقة فاذا كانت الدائرة حثية inductive يكون التيار متأخرا lagging power factor اما فى حالة الدائرة السعوية capacitive يكون التيار متقدما عن الجهد ويعرف معامل القدرة فى هذه الحالة بانه متقدم leading power factor .

مثال :



لحساب القدرة الواصلة للدائرة من المصدر نحسب المعاوقة z والتيار من الدائرة الثانية

$$Z = 3 + \frac{j4(4-j4)}{4+j4-j4} = 7 + j4 = 8.06\angle 29.7^0\ \Omega$$

والتيار

$$I = \frac{10}{8.06\angle 29.7^0} = 1.24\angle -29.7^0\ A$$

والقدرة

$$P = vi\ \cos\theta = 10 * 1.24 \cos 29.7^0 = 10.8\ \text{watt}$$

ومعامل القدرة

$$P.F = \cos 29.7^0 = 0.89 \quad \text{lag}$$

ايضا يمكن حساب القددرة بمعرفة مقاومة الدائرة وقيمة التيار المار بها حيث

$$P = VI\ \cos.$$
$$V = Iz$$

حيث z هو مقدار المعاوقة فان

$$P = I^2 z \cos\theta$$

ولكن الجزء الحقيقى من المعاوقة هو $z\cos\theta = R$

$$P = I^2 R$$

وفى المثال السابق نجد ان

$$R = Z\cos\theta = 7\,\Omega$$

$$P = (1.24)^2 * 7 = 10.8 \text{ watt}$$

ايضا مسامحة الدائرة

$$Y = \frac{1}{z} = G + jB$$

$$P = VI\cos\theta$$

$$= V^2 Y\cos\theta$$

وحيث ان التوصيلة G هى الجزء الحقيقى لـــ Y

$$G = Y\cos\theta$$

$$P = V^2 G$$

وبتطبيق ذلك على المثال السابق ايضا نجد ان :.

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{8.06\,129.70} = 0.124\ I\!-29.72^0\ s$$

$$G = 0.124\cos(-29.7^0) = 0.108\ s$$

$$P = (10)^2(0.108) = 10.8 \text{ watt}$$

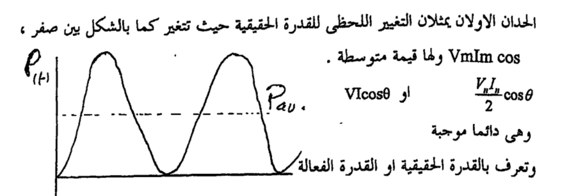
القدرة الحقيقية والقدرة الغير فعالة real power and reactive power .

القيمة اللحظية للقدرة الداخل للدائرة تحصل عليها من العلاقة

$$P_{(t)} = \frac{V_2 I_2}{2}\cos\theta - \frac{V_n I_n}{2}\cos(2wt+\theta) = \left[\frac{V_n I_n}{2}\cos\theta - \frac{V_n I_n}{2}\cos\theta os\theta\, 2wt\right]$$

$$+\frac{VnIn}{2}\sin\theta in\theta\, 2wt.$$

الحدان الاولان يمثلان التغيير اللحظى للقدرة الحقيقية حيث تتغير كما بالشكل بين صفر ، $V_mI_m \cos$ ولها قيمة متوسطة .

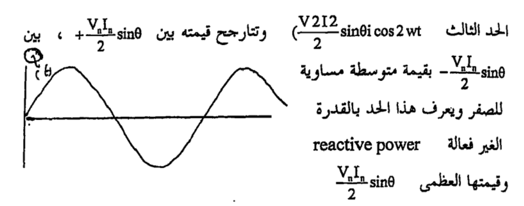


$\frac{V_n I_n}{2} \cos\theta$ او $VI\cos\theta$

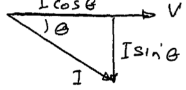
وهى دائما موجبة

وتعرف بالقدرة الحقيقية او القدرة الفعالة

الحد الثالث $(\frac{V2I2}{2} \sin\theta i \cos 2wt)$ وتتارجح قيمته بين $+\frac{V_n I_n}{2}\sin\theta$ ، بين $-\frac{V_n I_n}{2}\sin\theta$ بقيمة متوسطة مساوية للصفر ويعرف هذا الحد بالقدرة الغير فعالة reactive power وقيمتها العظمى $\frac{V_n I_n}{2}\sin\theta$



او $P_R = Q = VI\sin\theta$ وجدير بالملاحظة ان القدرة الفعالة p تكون دائما موجبة حيث ان cos دائما موجبا القيمة سواء كانت θ موجبة او سالبة اما القدرة الغير فعالة Q فتكون موجبة اذا كانت θ موجبة ، وتكون سالبة اذا كانت θ سالبة وقد تم الاتفاق على اعتبار القدرة الغير فعالة الناشئة عن الاحمال الحثية موجبة اى فى حالة اذا كان التيار متاخرا عن الجهد (lagging) وسالبة فى حالة الاحمال السعوية اى اذا كان التيار متقدما على الجهد (leading) ووحدات قياس القدرة الغير فعالة هى (الفولت – الامبير) (var) وهى تمثل قدرة مترددة بين المصدر والدائرة ووظيفتها توصيل الطاقة الى المجال المغناطيسى او الى المكثفات عند الشحن . ثم تعود مرة ثانية الى المصدر عند انهيار المجال المغناطيسى او عند تفريغ المكثفات .



ومن جهه اخرى اذا نظرنا الى متجهات الجهد والتيار نجد ان متجه التيار يمكن تحليله الى مركبين .

١- مركبة فى اتجاه الجهد $I \cos \theta$ او المركبة المتفقة فى الموجه مع الجهد او مركبة القدرة . حيث ان حاصل ضربها مع الجهد يعطى القدرة الفعالة .

٢- مركبة فى اتجاه عمودى على اتجاه الجهد quadrature component $I \sin$ او المركبة الغير فعالة للتيار reactive component وحاصل ضرب هذه المركبة فى الجهد يعطى القدرة الغير فعالة.

الفولت . أمبير volt .amperes

يعرف حاصل ضرب قيمة الجهد فى قيمة التيار فى دوائر التيار المتردد بانه **الفولت** امبير (VI) وعند ضرب الـــ (VI) فى معامل القدرة $\cos \theta$ نحصل على القدرة الفعالة أى ان .

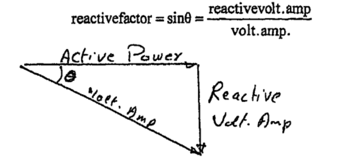
$$\text{POWER FACTOR} = \cos\theta = \frac{\text{power}}{\text{volt .amperes.}}$$

ايضا عند ضرب VI فى $\sin \theta$ نحصل على القدرة الغير فعالة

اى ان

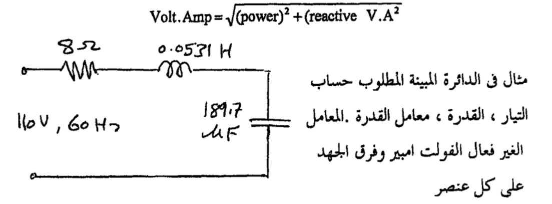
$$\text{reactivefactor} = \sin\theta = \frac{\text{reactivevolt.amp}}{\text{volt.amp.}}$$

وبذلك فان القدرة الفعالة والقدرة الغير فعالة هما مركبتى الفولت .امبير



$$\text{Volt.Amp} = \sqrt{(\text{power})^2 + (\text{reactive V.A}^2}$$

مثال فى الدائرة المبينة المطلوب حساب التيار ، القدرة ، معامل القدرة .المعامل الغير فعال الفولت امبير وفرق الجهد على كل عنصر



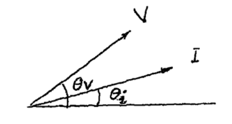
$$X_L = 2\Pi 60 * 0.0531 = 20\,\Omega.$$
$$X_L = \frac{1}{2\Pi * 60 * 189.7 * 10^{-6}} = 14\,\Omega.$$
$$Z = R + j(20-14) = 8 + j6 = 10\,L\theta.$$
$$I = \frac{110}{10\,L\theta} = 11\,L-\theta A.$$
$$P.F = \cos\theta = \frac{8}{10} = 0.8$$
$$R.F = \sin\theta = \frac{6}{10} = 0.6$$
$$P = VI\cos\theta. = 110 * 11 * 0.8 = 968 \text{ watt}$$
$$\text{ReactiveVA} = Q = VI\sin\theta. = 110 * 11 * 0.6 = 726 \text{ vars}$$
$$VA = VI = 110 * 11 = 1210 = \sqrt{968^2 + 726^2}$$
$$V_R = 8 * 11 = 88\text{ v}.$$
$$V_L = 20 * 11 = 220\text{ v}.$$
$$Vc = 14 * 11 = 154\text{ v}.$$

يمكن حساب القدرة ايضا من العلاقة .

$$P = I^2R = (11)^2 8 = 968 \text{ watt}$$

حساب القدرة باستخدام الاعداد المركبة

لنفرض ان الجهد والتيار كما بالشكل .



$$P = VI\cos(\theta I - \theta i) = VI\cos(\theta I - \theta v).$$
$$P = VI[\cos\theta os\theta vco + \sin\theta in\theta vsi] = (V\cos\theta V c\alpha sos\theta os + (V\sin\theta V sisin\theta in = V_Y I_Y + V_{im} + I_{im}$$

فمثلا اذا كانت $V = 200 + j40$ ، $I = 30 - j10$

فان القدرة

$$p = (200)(30) + 40 * (-10) = 6000 - 400 = 5600 \text{ watt}.$$

حساب القدرة الغير فعالة من الاعداد المركبة

$$Q = VI\sin(\theta_v - \theta_i) = VI(\sin\theta_v\cos\theta_i - \cos\theta_v\sin\theta_i)$$

$$= (V\sin\theta_v)(I\cos\theta_i) - (V\cos\theta_v)(I\sin\theta_i)$$

أى أن

$$Q = (I_m V)(Re\, I) - (Re\, V)(I_m\, I)$$

فمثلا إذا كانت $V = 200\angle 30^\circ$ V

و $I = 10\angle 60^\circ$

فنجد ان

$$V = 173.2 + j100$$
$$I = 5 + j8.66$$
$$Q = (5*100) - (173.2*8.66) = -1000\text{ var.}$$
$$P = (5*173.2) + (100*8.66) = 1732\text{ watt.}$$
$$VA = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(1732)^2 + (-1000)^2} = 2000\text{ v.a.}$$

طريقة المرافق لحساب القدره . The conjugate method

يمكن حساب القدرة الفعالة P والغير فعالة Q بضرب متجه الجهد فى مرافق متجه التيار ويكون الجزء الحقيقى لحاصل الضرب هو القدرة الفعالة و الجزء التخيلى هو القدرة الغير فعالة

فاذا كان

$$V = V_{Re} + jV_{jm}.$$
$$I = I_{Re} + jI_{jm}$$

فان مرافق التيار يكون

$$I^* = I_{Re} - jI_{jm}$$

$$VI^* = s = (V_{Re}I_{Re} + V_{jm}I_{jm}) + j(I_{Re}V_{jm} - V_{jm}I_{Re})$$

$$s = P + jQ$$

ونلاحظ انه اذا ضربنا V*I نحصل على نفس قيمة القدرة الفعالة بينما تنعكس اشارة القدرة الغير فعالة فاذا اخذنا نفس المثال السابق نجد ان .

$$VI^* = (173.2 + j100)(5 - j8.66)$$
$$S = 1732 - j1000.var$$

وتعرف s بالقدرة لمركبة complex power

مثال : دائرة تسحب بتيار مقداره $5Q\sqrt{2}\sin(377t + 60^0)A$ سلط عليها جهد $100\sqrt{2}\sin(377t + 60^0)$

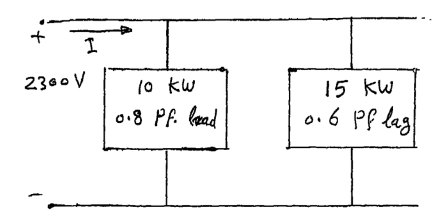
متجه الجهد $V = 100L30^0$

متجه التيار $I = 50L60^0 A$

مرافق التيار $I^* = 50L-60^0 A$

$$S = VI^* = 100 * 50L-30^0 = 4330 - j2500V.A$$
$$P = 4330 \text{ watt.}$$
$$Q = -5000 \text{ var}$$

مثال : مصدر جهد 2300 v موصل عليه حملان كما بالشكل احسب تيار المصدر I



$$S_1 = \frac{10000}{0.8} \angle -\cos^{-1} 0.8 \qquad V.A$$

$$= 12500 \angle -56.9 \qquad V.A$$

$$S_2 = \frac{15000}{0.6} \angle \cos^{-1} 0.6 \qquad V.A$$

$$= 25000 \angle 53.1^6 \qquad V.A$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$= 10000 - j7500 + 15000 + j20000$$

$$= 25000 + j12500 \ V.A$$

$$= 27951 \angle 26.6^0$$

$$I = \frac{27951}{2300} = 12.2 \ A.$$

تمـــــــارين ٦

6 - 1 A series R L circuit has resistor and inductor voltages of 40 v and 60 v (RMS) respectively. What is the applied voltage?
Find all the voltage phasors given that the resistor voltage has 30

6 -2 A series RLC circuit has 100 v (rms) applied. If the resistor and inductor voltages are 60 v and 100 v resp . what is the capacitor rms. Voltage . Find all the voltage phasors . given that the current phasors has a 30

6- 3 A 2 H inductor and a 10 Ω resistor are in series . find their total impedance in polar form at (a) 0 Hz , 4Hz &1 kHz draw the impedance diagram .
6 -4 repeat problem 6 -3 with R & L in parallel.

6 -5 find the impedance in polar form of a 10 μF capacitor in series with a 47 Ω resistor at frequencies of (a) 0 Hz
(b) 10 kHz (c) 1 MHz . Draw the impedance diagram

6 -6 repeat problem 6 -5 with the components in parallel .

6 -7 A capaictor and a resistor in series draw a current $1\angle 30^\circ$ from a 110 v 50Hz source .Find the capacitance and resistance .

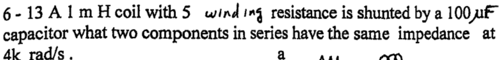
6 -8 Find the impedance in polar form of the series combination of 1 Ω resistor , a 1mH inductor and a 10μF capacitor at frequencies (a)100 Hz (b) 5KHz (d) 1M Hz draw the impedance diagram

6 - 9 in problem 6 - 8 find the frequency at which the impedance is pure resistance and the frequency at which the angle is 45 °

6 – 10 two elements in series draw a curreant of 12 sin (200t+20) in response to an applied voltage of 48 sin (200t+60) find the two elements

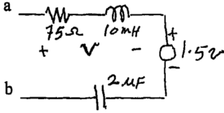
6 - 11 find the total impedance in polar form of the series impedances $100\angle -75$ $2000\angle 80$ and $500\angle 10$ Ω

6 - 12 A capicator in series with a 2H coil and having a 10 Ω winding resistance what capacitance makes the combination purely resistive at 1 KHz .



6 - 13 A 1 m H coil with 5 winding resistance is shunted by a $100\mu F$ capacitor what two components in series have the same impedance at 4k rad/s .

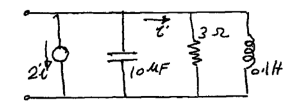
6 -14 for the circuit shown find the impedance between a b at 1o krad/s



6 - 15 A circuit has 1000 30 v applied across three series connected impedances of $10\angle 30^\circ$, $15\angle -05^\circ$ and $20\angle 60^\circ$ Ω Find the current and the voltage across each impedance and draw the phasor diagram

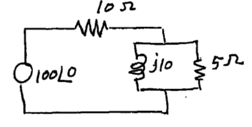
6 -16 three elemments in parallel have an impedance f $1.5\angle -30$ at 4khz . if one elements is a capacitor of $10\mu F$. what are the other two elements

6 - 17 for the circuit shown find the input impedance at 20 krad/sec .

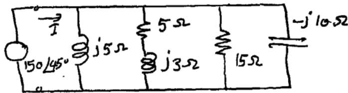


6 - 18 A current of 4 cos. $(1000t-30^\circ)$ A flows into the parallel combination of a 300 2 uF capacitor find the resistor and the capacitor currents

6 - 19 for the circuit shown find the current in each elements and draw the phasor diagram.



6 - 20 find the current I and the total impedance



6 - 21 In the circuit shown determine what 50 Hz voltage must be applied across AB in order that the current in the condenser to be 10 A draw a complete phasor diagram .

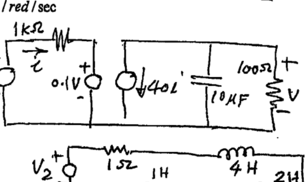
6 - 22 An inductor L and a resistor R are connected in series . A capacitor C is shunted across L and R . At what frequency will the total current in the circuit be independent of the value of R . what is the value of the current when the applied voltage is V

6 - 23 A 100 v is applied between A and B . find the current I use Y – Δ or Δ–Y transformation

6 - 24 if a person makes good contact with his hands , the circuit can be represented as shown . find the steady state current I at a frequency (a) 50hz (b)400hz with Vs = 220 v

6 - 25 the model of a high frequency amplifier is shown what is v across the lead resistance .
Vs = 10 cos wt . w = 10^8 / red / sec

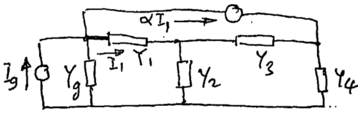
6 - 26 An amplifier circuit is shown . with an input voltage Vs = 5 cos 200 t y find the output voltage v



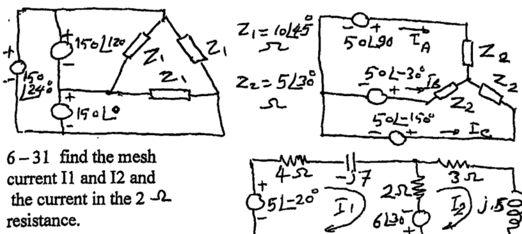
6 - 27 write the impedance matrix of the network shown at w = 1 red/sec

6 - 28 find the current I

6 - 29 write the node voltage equation s



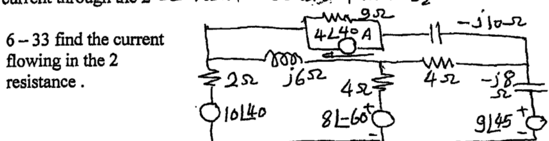
6 -30 use (a) loop analysis (b) node analysis to find the current IA , Iβ and Ic in each of the two circuits shown .



6 – 31 find the mesh current I1 and I2 and the current in the 2 Ω resistance.

6 - 32 In the above circuits choose loop current such that I2 is the only current through the 2 Ω resistance and find I_2 .

6 – 33 find the current flowing in the 2 resistance .



6 – 34 find a circuit that corresponds to the following mesh equations .

$$\begin{bmatrix} 12-j8 \\ -16+j10 \\ 4-j5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+j10 & -(3-j2) & -(3+j2) \\ -(3-j2) & 10-j16 & -(5+j4) \\ -(3+j2) & -(5+j4) & 7-j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

6 - 35 For the circuit of problem 6 - 29 find the transfer impedance between the loop counting the 2 ntaining the -j8

6 - 36 A passive two terminal circuit with 200 (10t+20) v applied , draws 10 sin (10 -30) amp. Find the power factor . Also find the peak value of the power and the average power

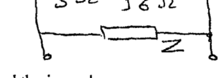
6 - 35 A circuit consisting op a resistor and a capacitor dissipates 5 w when connected to a 110 v - 1000hz source . if the power factor is 0.5 what are the resistance and capacitance

(a) when they are connected in series

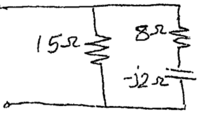
(b) when they are connected in parallel .

6 - 36 A capcitive load dissipates 2 kw when drawing 20 A from 150 v . source . what is the power factor and if the voltage is increased to 200 v , what are the current drawn and the power absorbed .

6 - 37 In the circuit shown , the power in the 3 Ω resistance is 666 watts. And the total cicuit takes 3370 VA at 0.937 pf leading find the impedance z.

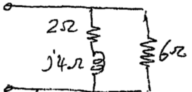


6 - 38 In the circuit shown the total power in 2000 watts. What is power in each resistor

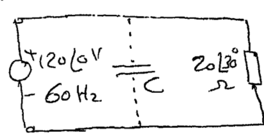


6 - 39 If a load takes $10\angle{-20}$ amp with $200\angle{30}$ v applied . Find the power triangle

6 - 40 find the power factor of the circuit, if the 6 Ω resistance is changed such that the overall power factor become 0.9 lagging . what will be the new value of the resistance .



6 - 41 find the capacitance C necessary to correct the power factor to 0.95.



الفصل السابع

نظريات الدوائر

Network Theorems

توفر قوانين كيرتشوف امكانية حل الدوائر إلا أنه باســـتخدام بعـــض النظريات يمكن الحصول على حلول أيسر وأسرع للدائرة ، من هذه النظريـــات نذكر الآتي

١- نظريـــة الإضافـــة The Superposition theorem

أو مبدأ الإضافة The Principle of Superposition

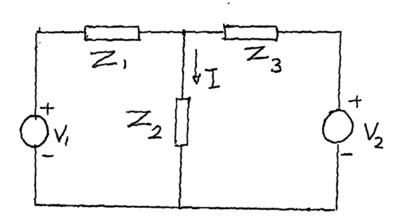
وهذه النظرية تنطبق على جميع الدوائر الخطية ويمكن صياغتها على النحـــو التالي .

- في أي دائرة خطية اذا احتوت على أكثر من مصدر فإن الاســـتجابة عند أي نقطة تكون مساوية لمجموع الاستجابات الناشئة عن كل مصدر علـــى حده بينما نضع جميع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

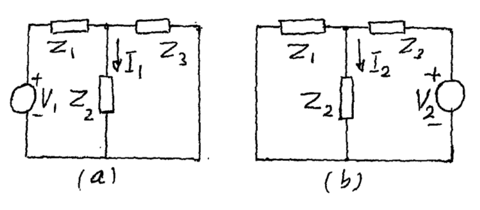
والبرهان على ذلك يمكن الحصول عليه من صيغة التيـــار I_i فـــي حالة التحليل بمعادلات تيار الحلقة أو V_i في حالة التحليل بمعادلات جهد العقدة حيث نجد أن

$$I_i = \frac{\Delta_1 i}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_2 i}{\Delta} V_2 .... \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} V_k .... + \frac{\Delta ni}{\Delta} V_n$$

حيث يمكن اعتبار التيار I_i ناشئ عن مجموع n من التيارات كل منـــها يساوي $\frac{\Delta_{ki}}{\Delta} V_k$ حيث $k = 1, 2, ...n$ وحيث Δ ، $\Delta_1 i$ ، $\Delta_2 i$ ، Δ_{ki} تعتمد فقط على عناصر الدائرة وكمثال لتطبيق هذه النظرية نأخذ الدائرة المبينة بالشكل



حيث يمكن اعتبار التيار I هو محصلة دائرتين a , b

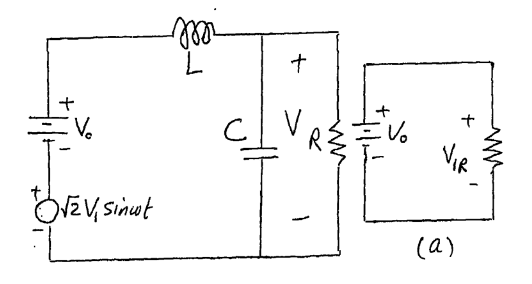


$$\therefore \quad I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{V_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} + \frac{V_2}{Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_3 V_1 + Z_1 V_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}$$

وفي الغالب فإن تطبيق هذه النظرية لا يعطي حلولا سهلة إلا في الحالات البسيطة التي تكون فيها حل الدائرة واضحا بمجرد النظر ، غير أن تطبيق نظرية الإضافة يكون جذريًا في حالة الدوائر التي تحتوي على مصادر تعمل عند ترددات مختلفة حيث لا نستطيع أن نستخدم نفس الدائرة مع جميع المصادر ولربما يحتاج كل مصدر إلى تعديل الدائرة حسب تردد المصدر .

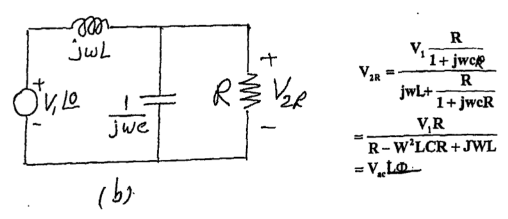
مثال : لحساب الجهد V على المقاومة في الدائرة المبينة



فإننا نجد أن الجهد الناشئ عن مصدر التيار المستمر على حده حسب الشكل(a)

$$V_{1R} = V_0$$

بالإضافة إلى الجهد الناشئ عن مصدر التيار المتردد على حده حسب الشكل (b)



$$V_{2R}=\frac{V_1\frac{R}{1+jwcR}}{jwL+\frac{R}{1+jwcR}}$$

$$=\frac{V_1R}{R-W^2LCR+JWL}$$

$$=V_{ac}\angle\Phi$$

$$V_{ac}=\frac{V_1R}{\sqrt{(R-W^2LCR)^2+W^2L^2}}$$

$$\Phi=-\tan^{-1}\frac{WL}{R-W^2LCR}$$

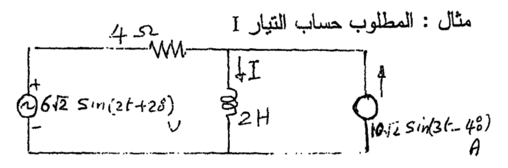
ويكون الجهد الكلي على المقاومة هو

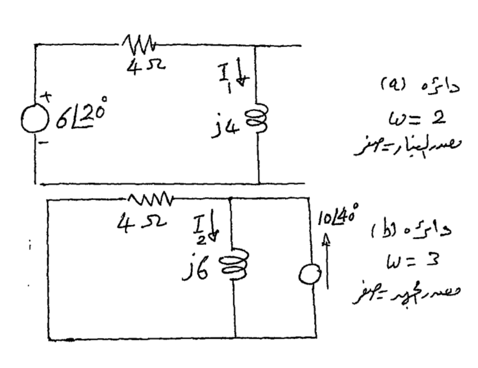
$$V=V_{1R}+V_{2R}$$

$$=V_0+\sqrt{2}V_{ac}\sin(wt+\Phi)$$

وهذا النوع من الدوائر الذي يحتوي علـــى مصـــدر تيـــار مستمر ومصدر تيار متردد شائع في الدوائر الإلكترونية حيث يلـــزم مصدر تيار مستمر لتوفير الشروط المناســـبة لعمـــل الترانزســـتور ولإمداد الدائرة بالطاقة المطلوبة ويكون مصدر التيار المـــتردد هـــو الإشارة المطلوب التعامل معها .

مثال : المطلوب حساب التيار I





يوجد بالدائرة مصدران مختلفان في التردد فيلـــزم تطبيـــق نظريـــة الإضافة مع تعديل الدائرة حسب تردد المصدر ففي حالـــــة مصـــدر الجهد حيث W = 2 دائرة (a)

$$I_1 = \frac{6\angle-20}{4+J4} = \frac{1.5}{\sqrt{2}}\angle-25^0 A$$

وفي حالة مصدر التيار W = 3 دائرة (b)

$$I_2 = \frac{40\angle-40^0}{4+J6}$$
$$= 5.55\angle 96.3 \; A$$

وحيث أن التردد مختلف فإن الجمع يتم في الحيز الزمني $(I = I_1 + I_2)$???

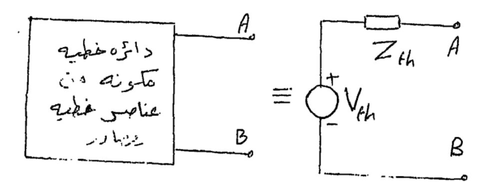
$$\therefore i_{(t)} = i_{1(t)} + i_{2(t)}$$
$$= 1.5 \sin(2t - 25^\circ) - 7.85 \cos(3t - 6.3)$$

٦ – ٢ نظريــــــــة ثيفينيــــــــن TheVenin's Theorem ، ونظرية نورتن Norton's Theorem

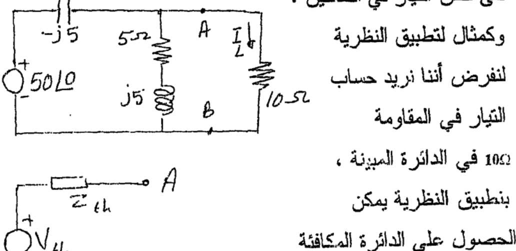
وتعطي النظريتان الأساس التي يمكن به الحصول علـــى دائرة مكافئة لأي دائرة خطية وتعرف أي دائرتين بأنهما متكـــافئتين إذا مررت كل منهما تيارا في معاوقة توصل على طـــرف الدائــرة بحيث يكون التياران متساويان إذا تساوت المعاوقة الموصلة على كل منهما .

٦ – ٢ – ١ نظرية ثيفينين

تنص نظرية ثيفينين على أن أي دائرة خطية تحتـــوي علـــى عناصر ومصادر ولها طرفين A , B يمكن الإستعاضة عنها بمصدر جهد V_{th} ومعاوقة Z_{th} على التوالي



حيث V_{th} هو جهد الدائرة المفتوحة مقاسا بين النقطتين A , B ، Z_{th} هي مقاومة الدخول للدائرة بين الطرفين A , B عندما تكون جميع المصادر المستقلة داخل الدائرة تؤول إلى الصفر . فإذا وصلنا معاوقة Z_L بين الطرفين B , A في الدائرة الأصلية ووصلنا نفس المعاوقة Z_L بين الطرفين A , B في الدائرة المكافئة فإننا نحصل على نفس التيار في الحالتين .



وكمثال لتطبيق النظرية لنفرض أننا نريد حساب التيار في المقاومة 10Ω في الدائرة المبينة ، بتطبيق النظرية يمكن الحصول على الدائرة المكافئة للطرف الأيسر من الدائرة على الشكل المبين

حيث

$$V_{th} = V_{AB} = \frac{50\angle 0(5+j5)}{5+j5-j5}$$

$$= 70.7\angle 45^{0}\,V$$

و Z_{th} هي المقاومة بين الطرفين B , A في الدائرة المبينة

$$Z_{th} = \frac{-j5(5+j5)}{5+j5-j5}$$

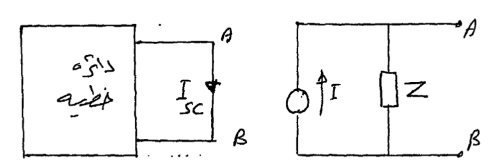
$$= 5 - j5\Omega$$

ويكون التيار في المقاومة 10Ω

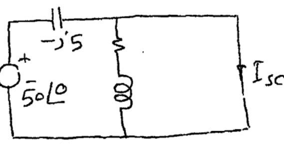
$$I_L = \frac{70.7\angle 45^\circ}{5-j5+10}$$
$$= 4.47\angle 63.43^\circ \ A.$$

٦ – ٢ – ٢ نظرية نورتن

تنص على أنه في أي دائرة خطية مكونة من عناصر خاملة ومصـــادر ولها طرفان فإن A , B يمكن الاستعاضة عنها بمصدر تيار واحد I ومعاوقـــة واحدة موصلة على التوازي كما بالشكل



حيث I هو التيار المار في الدائرة المقصورة (I_{sc}) بين النقطتيـــن A , B للدائرة الأصلية و Z_{th} هي المقاومة بين الطرفين B , A للدائرة الأصلية عندما تؤول جميع المصادر في الدائرة إلى الصفر فإذا أخذنا نفس المثال السابق نجـد أن



$$I_{sc} = \frac{50\angle 0}{-J5} = 10\angle 90^\circ \ A$$

$$Z = \frac{-J5(5-J5)}{5-J5+J5} = 5-J5$$

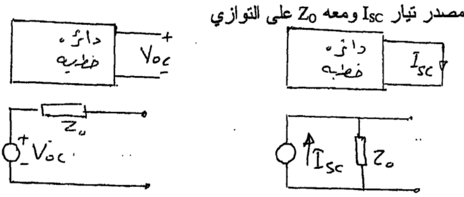
وهي نفس قيمة المعاوقة السابقة ويكون التيار المار في المقاومـــة 10Ω

$$I_L = 10\angle 90^0 \left(\frac{5-J5}{15-J5}\right) = 4.47\angle 63.43^0 \text{ A}$$

وهو نفس قيمة التيار التي حصلنا عليها من تطبيق نظرية ثيفينين .

والواقع أن نظرية ثيفينين ونظرية نورتن هما وجهان لطريقـــة تمثيـل الدائرة المكافئة بين طرفين لأي دائرة خطية مكونة من عناصر خاملة ومصادر ،

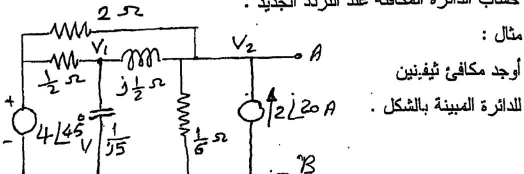
وبصفة عامة فإن أي دائرة خطية مكونة من عناصر خاملة ومصادر . يمكن الحصول على دائرة مكافئة لها بين أي طرفين وتكون الدائرة المكافئـــة على هيئة مصدر واحد ومعاوقة واحدة وللحصول على الدائرة المكافئة نحسـب جهد الدائرة المفتوحة بين الطرفين V_{oc} وتيار القصر الذي يمر عند توصيـل الطرفين ببعضهما I_{sc} وحساب المعاوقة $Z_o = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$ ونضع الدائرة المكافئة إمـا على صورة مصدر جهد قيمته V_{OC} ومعه Z_O على التوالي أو علـــى صـورة مصدر تيار I_{SC} ومعه Z_O على التوازي



وجدير بالملاحظة أن الدائرة المكافئة التي نحصل عليها تكافئ الدائرة الأصليـة عند الطرفين B , A عند تردد واحد فقط وهو التردد الذي تم عنده الحساب ذلك أن المفاعلات في الدائرة الأصلية تتغير بتغير التردد فإذا تغير الـتردد يجـب حساب الدائرة المكافئة عند التردد الجديد .

مثال :

أوجد مكافئ ثيفينين للدائرة المبينة بالشكل .



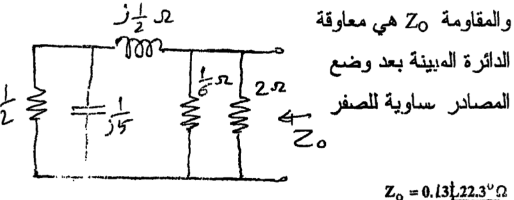
جهد الدائرة المفتوحة هو V_2 ويمكن الحصول عليه باسـتخدام معـادلات جهد العقدة

$$\begin{bmatrix} 8\angle 45^\circ \\ 2\angle 45^\circ + 2\angle 20^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j5-j2 & j2 \\ j2 & -j2+6+0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

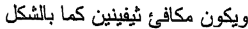
$$V_{oc} = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+j3 & 8\angle 45^\circ \\ j2 & 3.9\angle 32.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j3 & j2 \\ j6 & 6.5-j2 \end{vmatrix}}$$

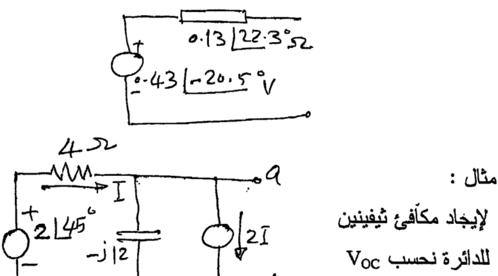
$$= \frac{11.9\angle 13.5^\circ}{27.7\angle 34^\circ} = 0.43\angle -20.5^\circ \text{ V}$$

والمقاومة Z_o هي معاوقة الدائرة المبينة بعد وضع المصادر ساوية للصفر



$Z_o = 0.13\angle 22.3^\circ \Omega$


ويكون مكافئ ثيفينين كما بالشكل



مثال :

لإيجاد مكافئ ثيفينين

للدائرة نحسب V_{OC}

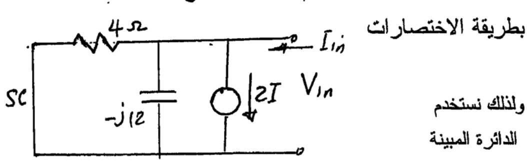
بكتابة معادلة جهد العقدة a

$$\frac{20\angle 45^{\circ}}{4} - 2I = V_a\left(\frac{1}{4} + \frac{J}{12}\right)$$

$$I = \frac{(20\angle 45^{\circ} - V_a)}{4}$$

$$Va = V_{OC} = 19\angle 63.4^{\circ}\,V$$

نظرا لوجود المصدر المحكوم 2 I لا نستطيع حساب المعاوقـــة Z_O بطريقة الاختصارات



ولذلك نستخدم

الدائرة المبينة

لحساب Z_O من العلاقة

$$Z_O = \frac{V_{in}}{I_{in}}$$

$$I_{in} - 2I = V_{in}(\frac{1}{4} + \frac{j}{12})$$

$$Z_O = \frac{V_{in}}{I_{in}} = -3.8\Omega$$

ويمكن حساب Z_O أيضا عن طريق حساب تيار القصر I_{SC} للدائـــرة بين الطرفين b , a في وجود المصدر المستقل $20L45^0$ V ومنها نجد أن

$$Z_O = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$$

حيـــث نجـــــد أن

$$I_{SC} = -2I + I = -I$$

$$= -\frac{20\,L\,45^{\,O}}{4} = -5\,L\,45^{\,0}\,A$$

ومنها

$$Z_o = \frac{19\,\angle 63.4^{\circ}\ V}{-5\,\angle 45^{\circ}\ A}$$

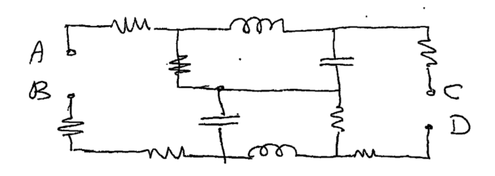
$$= -3.8\,\angle 18.4^{\circ}$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

٦ – ٣ نظرية التبادل (أو التعاكس) The Reciprocity Theorem

في أي دائرة مكونة من معاوقات خطية إذا وصلنـــا مصـــدرا مثاليا بين أي طرفين وقسنا الاستجابة نتيجة لهذا المصدر في نـــوع

آخر من الدائرة بواسطة جهاز قياس مثالي فإن النسبة بين قيمة المصدر وقراءة جهاز القياس لا تتأثر بتبادل وضعيهما



فمثلا في الدائرة المبينة إذا وضعنا مصدرا للجهد V بين النقطتين B , A ووضعنا أميتر لقياس التيار المار عند النقطتين D,C فإن النسبة بين قيمة مصدر الجهد وقراءة الأميتر $\frac{V}{I}$ لاتتغير إذا عدلنا وضع مصدر الجهد ليكون بين النقطتين D , C ووضعنا الأميتر بين النقطتين B , A .

مثال : في الدائرة السابقة إذا وضعنا مصدرا للجهد قيمته $100 \angle 0^{0}$ V في الفرع A B ونشأ عنه تيار $5 \angle -60^{0}$ في الفرع C D ما هو التيار الذي يمر في الفرع A B إذا وضعنا مصدرا للجهد مقداره $50 \angle 230^{0}$ V في الفرع C D طبقا لنظرية التبادل فإن المعاوقة التبادلية بين الفرعين ثانية

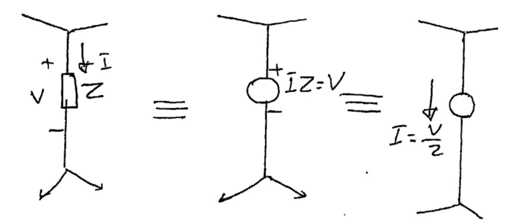
$$Z = \frac{V}{I} = \frac{100\angle 0}{5\angle -60}$$
$$= 20\angle 60^{0}\,\Omega$$

ومنها نجد أن التيار المار في الفرع AB في الحالة الثانية .

$$I = \frac{50\angle 23.1^{o}}{20\angle 60^{o}} = 2.5\angle - 36.9^{o}$$
$$= 2 - J1.5A$$

٦ – ٤ نظرية الإحلال Substitution theorem

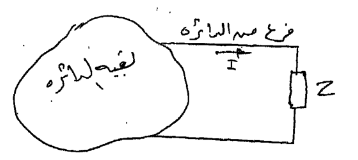
في أي دائرة إذا وجدت مقاومة محددة Z يمر بها تيار معروف I فإنـــه يمكن احلال المعاوقة بمصدر جهد قيمته I_2 أو بمصدر تيار قيمته I

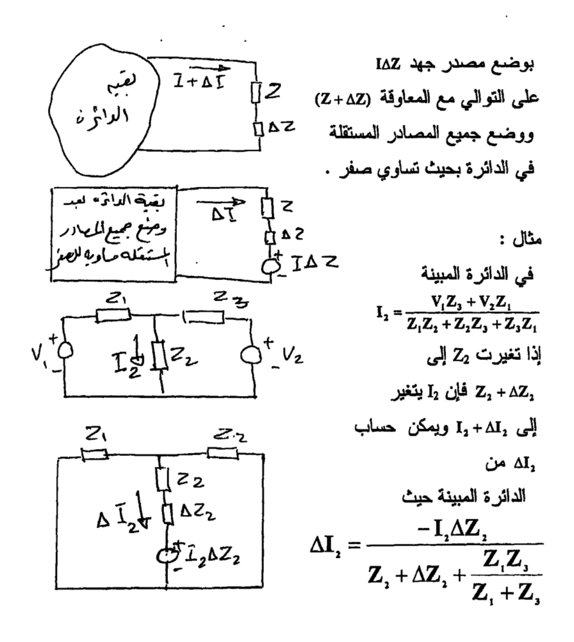


٦ – ٥ نظرية التعويض The Compensation Theorem

إذا وجدت معاوقة Z يمر بها تيار I في أي فرع مـــن دائـــرة وإذا تغيرت المعاوقة بمقدار ΔZ فإن التيار في جميع أفرع الدائرة يتغير بمقـدار ΔI ويمكن حساب ΔI بوضع مصدر جهد $I\Delta Z$ على التوالي مـــع المعاوقـــة بعـــد التعديل $(Z+\Delta Z)$ بحيث يعمل هذا المصدر وحده في الدائرة ويكون اتجاه هـــذا المصدر في اتجاه هبوط الجهد بالنسبة للتيار I

ففي الشكل المبين إذا تغيرت Z الى فإنه يمكن حساب ΔI





بوضع مصدر جهد $I\Delta Z$ على التوالي مع المعاوقة $(Z+\Delta Z)$ ووضع جميع المصادر المستقلة في الدائرة بحيث تساوي صفر .

مثال :

في الدائرة المبينة

$$I_2 = \frac{V_1 Z_3 + V_2 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}$$

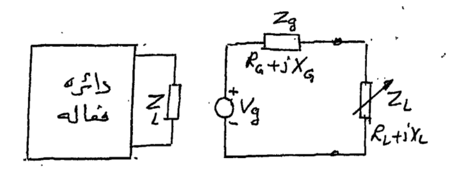
إذا تغيرت Z_2 إلى $Z_2 + \Delta Z_2$ فإن I_2 يتغير إلى $I_2 + \Delta I_2$ ويمكن حساب ΔI_2 من الدائرة المبينة حيث

$$\Delta I_2 = \frac{-I_2 \Delta Z_2}{Z_2 + \Delta Z_2 + \dfrac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}}$$

٦ – ٦ أقصى انتقال للقدرة The Maximum Power Transfer

تهتم هذه النظرية بكيفية الحصول على أقصى قيمة ممكنة للقـــدرة من دائرة إذا وصل عليها معاوقة حمل يمكن تغييرها .

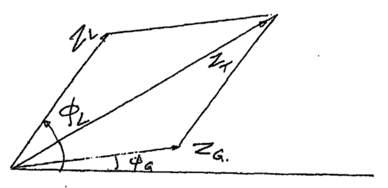
وحيث أن أي دائرة يمكن اختصارها (حسب نظرية ثيفينين) إلى مصدر واحد ومعاوقة واحدة فإن النظرية يمكن صياغتها بصورة عامة كالآتي



يكون انتقال القدرة من مصدر ذو معاوقة داخلية ثابتة قيمة عظمى عندما تكون معاوقة الحمل الذي يستقبل القدرة مساوية لمعاوقة المصدر أي أنه إذا كانت $z_s = R_s + JX_s$ فإن المعاوقة Z_L يجب اختيارها بحيث تكون $Z_L = R_s - JX_s$ حتى يتسنى لها استقبال أكبر قيمة من القدرة الخارجة من المصدر ولبرهنة النظرية نحسب القدرة من العلاقة

$$p_L = R_e(V_L I_L^*)$$

ومن رسم المتجهات نجد أن



$$I_L = \frac{V_G}{Z_T}$$

$$V_L = \frac{V_G Z_L}{Z_T}$$

$$P_L = Re\left(\frac{V_G Z_L}{Z_T}\right)\left(\frac{V_G}{Z_T}\right)^*$$

$$p_L = \frac{V_G^2}{Z_T^2} R_e Z_L$$

$$= \frac{V_G^2 Z_L \cos \Phi_L}{Z_G^2 + Z_L^2 + 2Z_G Z_L \cos(\Phi_L - \Phi_G)}$$

وتكون القدرة P_L قيمـــة عظمـــى إذا كـــان

$$\frac{\delta P_L}{\delta Z_L} = O$$

$$\frac{\delta P_L}{\delta \Phi_L} = O$$

من الشرط الأول نجد أن $Z_G = Z_L$

ومـــــن الشـــــرط الثـــــاني نجـــــد أن

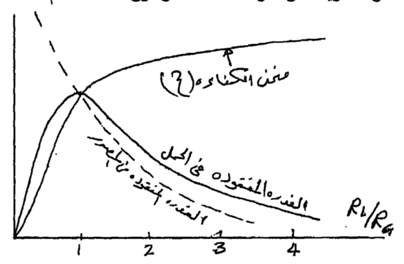
$$\sin \Phi_L = -\sin \Phi_G$$

أي أن $\Phi_L = -\Phi_G$

عند تحقق هذان الشرطان فإن

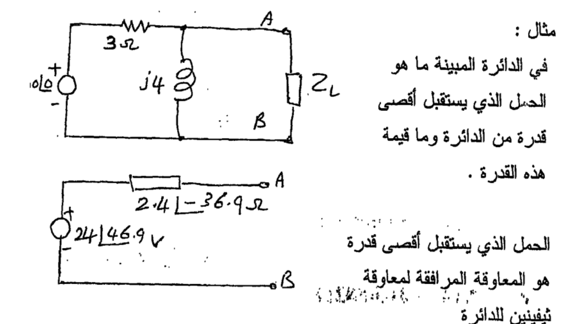
$$P_{L\max} = \frac{V_G^2}{4R_G}$$

وهي أقصى قيمة للقدرة التي يمكن الحصول عليها من المصدر وعندها يكـون الفقد في المصدر مساويا للقدرة الواصلة للحمل وتكون كفاءة النظام ٥٠ % .



مثال :

في الدائرة المبينة ما هو الحمل الذي يستقبل أقصى قدرة من الدائرة وما قيمة هذه القدرة .

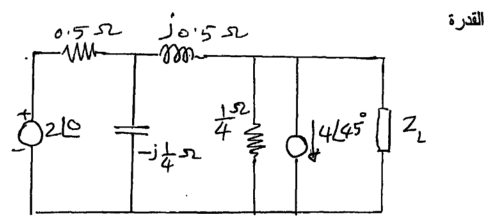


الحمل الذي يستقبل أقصى قدرة هو المعاوقة المرافقة لمعاوقة ثيفينين للدائرة

$$Z_L = Z_G^* = 2.4 \underline{|36.9}$$

$$P_{L\max} = \frac{(24)^2}{4\times 2.4} = \frac{(24)^2}{4\times 1.9^2} = 75W$$

مثال : أوجد معاوقة الحمل التي تستقبل أقصى قدرة من الدائرة وقيمة هذه القدرة



$$\begin{bmatrix} 4\angle 0 \\ -4\angle 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j2 & j2 \\ j2 & 4-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$V_{oc} = V_L = \frac{\begin{vmatrix} 2+J2 & 4\angle^\circ \\ J2 & -4\angle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+J2 & j2 \\ J2 & 4-J2 \end{vmatrix}} = 1.17\underline{|-104^\circ} V$$

$$Z_{th} = 0.147 + J0.0882\Omega$$

للحصول على أقصى قدرة

$$Z_L = 0.147 - J0.0882\Omega$$

وأقصى قدرة

$$P_{Lmax} = \frac{(1.17)^2}{4 \times 0.147} = 2.33w$$

٦ – ٧ مبدأ مواءمة المعاوقات The Principle Of Impedance Matching

وهو المبدأ الذي به يتم مواءمة مقاومة الحمل بحيث نستقبل أكبر قيمة ممكنة من قدرة المصدر وهذا المبدأ له أهمية كبيرة في دوائر الاتصالات والدوائر الإلكترونية بصفة عامة ومن نظرية القيمة العظمى للقدرة رأينا أن أنسب مقاومة حمل هي التي تكون مترافقة مع معاوقة المصدر وفي الحالات التي لا يمكن تحقيق شرط الترافق نظرا لطبيعة كل من الحمل والمصدر يمكن الحصول على أقصى قدرة بجعل $R_L = R_G$ ، $X_L = X_G$

وإذا تعذر الحصول على هذا الشرط أيضا يمكن جعل

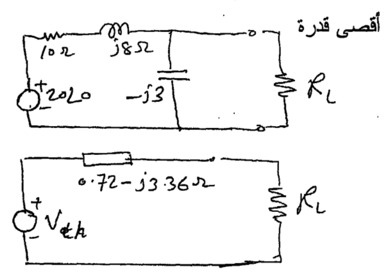
$$|Z_L| = |Z_G|$$

أي أن

$$\sqrt{R_L^2 + X_L^2} = \sqrt{R_G^2 + X_G^2}$$

مثال :

ما قيمة المقاومة التي يجب توصيلها على أطراف الدائرة لاســـتقبال أقصى قدرة



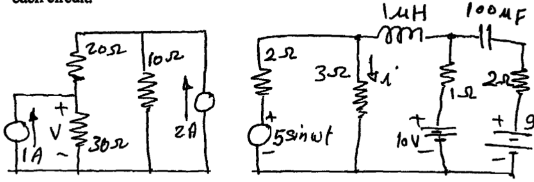
$Z_{th} = 0.72 - j3.36\Omega$

المقاومـــــة المطلوبة

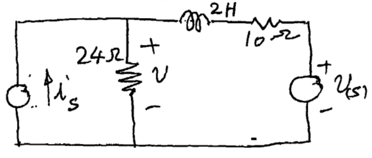
$R_L = \sqrt{(0.72)^2 + (3.36)^2} = 3.436\ \Omega$

تمـــــــارين

7-1 Use the principle of superposition to find the variables indicated in each circuit.



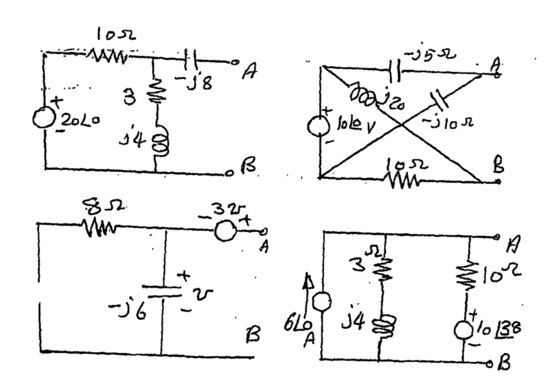
7-2 Find the voltage v for the circuit shown.



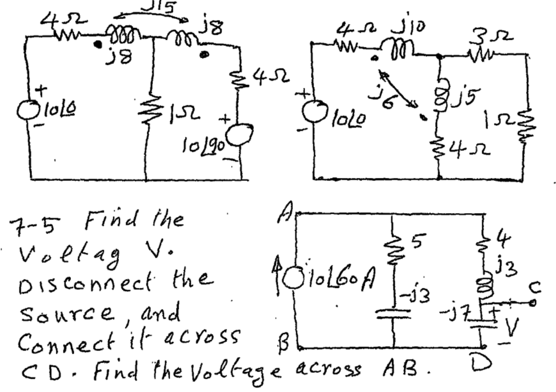
$v_{(s)} = 300 \sin 4t$ Volts.

$i_{(s)} = 30 \sin (3t - 15^\circ)$ A

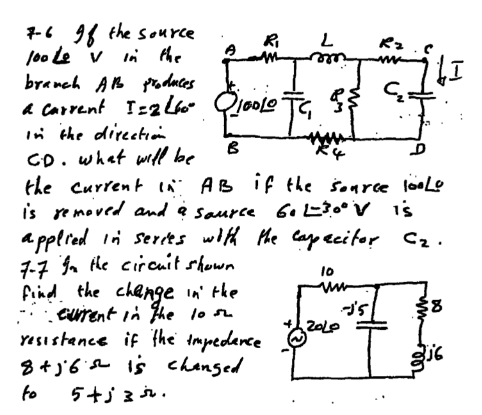
7-3 Calculate the Thevenin's and Norton equivalent circuits with respect to terminals A B for each of the following circuits.



7-4 Use Thevenin's theorem to find the current in the 1Ω resistance of the circuits below.



7-5 Find the Voltag V. Disconnect the Source, and Connect it across CD. Find the Voltage across AB.



7-6 If the source $100\angle 0$ V in the branch AB produces a current $I = 2\angle 60°$ in the direction CD. What will be the current in AB if the source $100\angle 0$ is removed and a source $60\angle -30°$ V is applied in series with the capacitor C_2.

7-7 In the circuit shown find the change in the current in the 10 Ω resistance if the impedance $8 + j6$ Ω is changed to $5 + j3$ Ω.

7-8 - In the circuit shown, Z_L is variable. Find the value of Z_L for which the source delevers maximum power in the following cases.

20 Ω   j30 Ω $100\angle 0$ V Z_L

(a) Z_L is arbitrary.

(b) $Z_L = R_L$ is a pure resistance.

(c) $Z_L = 30 + jX_L$. X_L is only variable

(d) $Z_L = R_L + jX_L$ both R_L and X_L are positive variables.

Calculate the Power supplied to the load in each case.

7-9 If M and R_L are variables, find M and R_L for Maximum Power transfer to R_L.

7-10 What load impedance Z_L absorbs maximum power from the circuit shown. Calculate the power delivered to the load.

7-11 Repeat problem 7-10 for the circuit shown

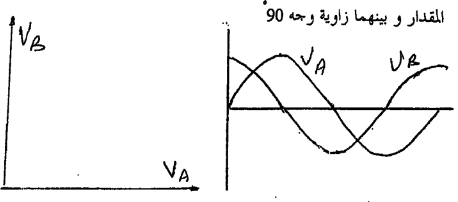
الفصل الثامن

النظم ثلاثية الأوجه

Three phase systems

يكون مصدر الجهد متعدد الاوجه poly-phase إذا كان مكوناً من جـــهدان أو أكثر متساوية فى المقدار و بينهم زوايا وجه ثابتة

النظام ثنائى الأوجه Two Phase system يتكون من جهد A و جهد B متســاويين فى المقدار و بينهما زاوية وجه 90°



و النظام الثلاثى يتكون من ثلاثة مصادر للجهد متساوية فى المقدار و بنيهما زاوية وجـــه 120°

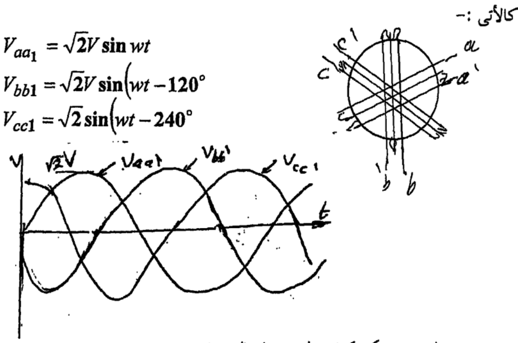
و النظام السداسى يتكون من ستة مصادر متساوية فى الجهد و يفصل بينها زاوية وجــــه 60° .

و النظام الثلاثى الأوجه هو الشائع الإستخدام فى توليد و نقل الطاقة الكهربية .

الجهود ثلاثية الأوجه Three phase Votages

و هى ثلاثة جهود مولدة فى ثلاثة ملفات متماثلة و موزعة على محيـــط ماكينـــة التوليد بحيث يشغل كل ملف ثلث المحيط فتكون القوة الدافعة المولـــدة فى كـــل ملـــف متساوية فى المقدار و يفصل بينها زاوية وجه مقدارها 120° و يمكن تمثيل هذه الجـــهود كالأتى :-

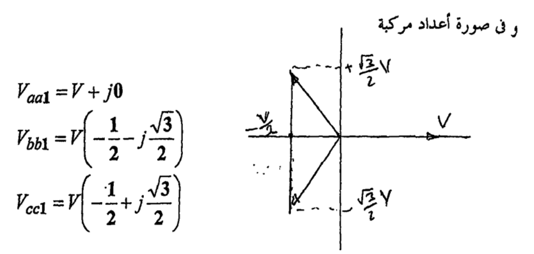
$$V_{aa_1} = \sqrt{2}V \sin wt$$
$$V_{bb1} = \sqrt{2}V \sin\left(wt - 120^{\circ}\right.$$
$$V_{cc1} = \sqrt{2} \sin\left(wt - 240^{\circ}\right.$$



و بإستخداء المتجهات يمكن كتابة الجهود على الصورة

$$V_{aa'} = V\angle 0^{\circ}$$
$$V_{bb'} = V\angle -120^{\circ}$$
$$V_{cc'} = V\angle -240^{\circ}$$

و فى صورة أعداد مركبة



$$V_{aa1} = V + j0$$

$$V_{bb1} = V\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$V_{cc1} = V\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

و تسمى الجهود الثلاثة متزنة balanced لأنها متماثلة فى المقدار و لها نفس التردد و يفصل بينها زاوية وجه مساوية تماماً لـــ °120 و فى هذه الحالة نجد أن مجموع الجـــهود الثلاثة مساوياً للصفر .

$$V_{aa`} + V_{bb`} + V_{cc`} = 0$$

و عادة فإننا نطلق على $V_{aa`} = V_a$ ، $V_{aa`} = V_b$ ، $V_{cc`} = V_c$ و يمكن توصيـــل هذه الجهود مع بعضها على شكل △ أو على شكل ⅄ .

balanced ⅄ connected 3-phase source .

balanced Δ connected 3-phase source

فى توصيلة نجمة (start) تكون الأطراف `a` ، `b` ، `c` موصلة مع بعضـــها كنقطة تعادل neutral

و يعرف كلاً من الجهود V_a ، V_b ، V_c بأنه جهد الوجه Phase voltage و يعرف كلاً من الجهد بين A,B و بين C,B ، و بين A,C بأنها جـــهود الخطــوط و تكــون التيارات I_a ، I_b ، I_c هى تيارات الأوجه و هى نفسها تيارات الخطوط .

و للحصول على جهود الخطوط فإننا نجد ان

$$V_{AB} = V_a - V_b$$

$$V_{AB} = V\angle 0 \;\; - V\angle -120^\circ$$

$$= V + j0 - V\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

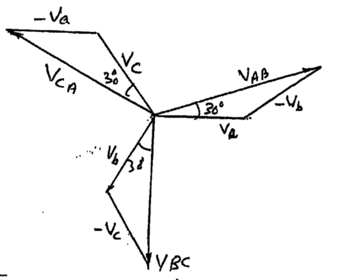
$$= \sqrt{3}\,V\angle 30$$

أيضاً

$$V_{AC} = \sqrt{3}\;V\angle -90^\circ$$

$$V_{CA} = \sqrt{3}\;V\angle -{:}{:}0^\circ$$

و يكون مخطط المتجهات كما بالشكل .



أى أنه فى حالة التوصيل ⅄ فإن جهد الخط يساوى $\sqrt{3}$ جهد الوجه ويبعـد عنه بزاوية مقدارها 30°

بينما يكون تيار الوجه هو نفسه تيار الخط .

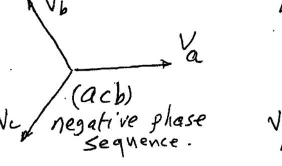
أما فى حالة توصيلة $\triangle$ فإننا نجد أن جهد الوجه هو نفسه جهد الخط حيث يكون

$$V_{CA} = V_C \ , V_{BC} = V_b \ , V_{AB} = V_a$$

و إذا كانت التيارات متزنة فإن تيار الخط يساوى $\sqrt{3}$ تيار الوجه و يبعد عنـــه بزاوية مقدارها 30°

و يعرف التتابع abc بإنه التتابع الوجهى الموجب Positive phase seqence

كما يعرف التتابع acb بأنه التتابع الوجهى السالب . Negative phase seqnence



V_c
V_a
(abc)
V_b
Positive phase
sequence

Balanced 3-phase loads **الأحمال ثلاثية الأوجه**

هى عبارة عن ثلاثة معاوقات Z_1 ، Z_2 ، Z_3 متصلة على هيئــة $\triangle$ أو على هيئة $\curlywedge$

Z_1 Z_2 Z_3

$\curlywedge$ Connected load

Z_3 Z_1 Z_2

$\triangle$ Connected load.

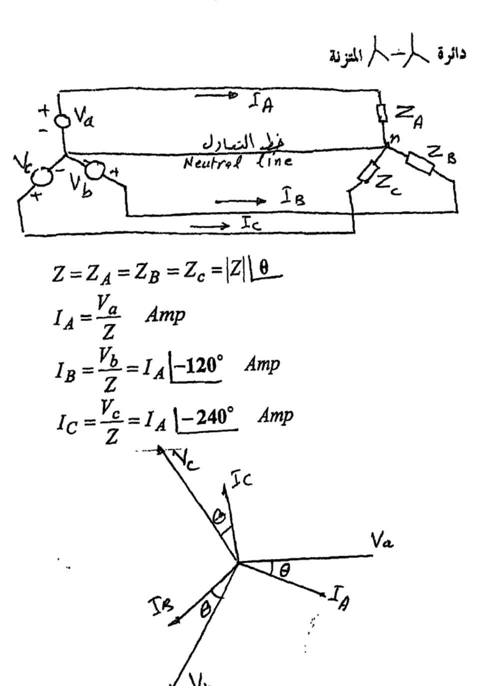
و تكون موصلة على مصدر ثلاثى الأوجه .

إذا كــــانت $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$ كـــــان الحمــــــل متزنــــــاً
Balanced 3 phase load

إذا كــــانت $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$ كـــــان الحمــــــل غـــــير مـــــــتزن
Unbalanced 3 phase load

و فى جميع الأحوال فإننا نطبق قوانين كيرتشوف لحل الدوائر غير أنه إذا كــــانت الدوائر متزنة فإننا نحصل على الحل بصورة أكثر سهولة .

دائرة Y-Y المتزنة



$$Z = Z_A = Z_B = Z_c = |Z|\underline{\lfloor \theta}$$

$$I_A = \frac{V_a}{Z} \quad Amp$$

$$I_B = \frac{V_b}{Z} = I_A \underline{\lfloor -120^\circ} \quad Amp$$

$$I_C = \frac{V_c}{Z} = I_A \underline{\lfloor -240^\circ} \quad Amp$$

مثال :

مصدر ثلاثى الأوجه له جـــهد وجـــه 114.9 V و مقاومـــة داخليـــة $0.52 + j0.5\ \Omega$ لكـــل وجـــه يغـــذى حمـــل مـــتزن ثلاثـــى الاوجـــه مقاومتـــه $18.6 + j10\ \Omega$ لكل وجه . من خلال خط نقل مقاومته $0.8 + j1\Omega$ لكل خـط . احسب تيار كل خط .

المقاومة الكلية للدائرة .

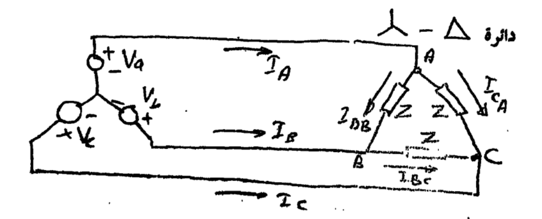
$$Z_t = 0.52 - j0.5 + 0.8 + j1 + 18.6 + j10$$
$$Z = 19.92 + j = 11.5\pi$$

$$I_A = \frac{114.9\ \ \underline{|0}}{19.92 + j11.5} = \frac{114.9\ \ \underline{|0}}{23\ \ \underline{|30^\circ}} = 5\ \underline{|-30^\circ}\quad A$$

لما كان النظام الثلاثى متزن فإن I_B تساوى I_A و تتأخر عنها 120° و كذلك I_B و تتأخر عنها 120° أى أن

$$I_B = 5\underline{|-150^\circ}\quad Amp$$
$$I_C = 5\ \underline{|-270^\circ}\quad Amp$$
$$= 5\underline{|90^\circ}\quad Amp$$

دائرة $\Delta - Y$



حيث تكون توصيلة الحمل Δ متزنة و توصيلة المصدر $\curlywedge$ متزنة

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}$$

$$I_B = I_{BC} - I_{BA}$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC}$$

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = I\angle\phi$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{V_{AB}}{Z}\angle -120^\circ = I\angle \phi - 120^\circ$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{V_{AB}}{Z}\angle -240^\circ = I\angle \phi - 240^\circ$$

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}$$

$$= I\cos\phi + jI\sin\phi - I\cos(\phi - 120^\circ) + j\sin(\phi - 120^\circ)$$

$$= \sqrt{3} I \;\phi - 30^\circ$$

أى أنه فى حالة الحمل المتصل على شكل Δ يكون جهد الوجه = جهد الخط

$$V_{AB} = V_L$$

تيار الوجه

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z}$$

و تيار الخط

$$I_\theta = \sqrt{3} I_{AB}$$

مثال :

حمل ثلاثى الأوجه مكون من ثلاثة معاوقات $10\angle 50^\circ$ متصلة Δ وموصلة على جهد ثلاثى الاوجه 220° أحسب تيارات الأوجه و تيارات الخطوط .

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z}$$

$$= \frac{220\angle 0}{10\angle -50} = 22\angle 50^\circ \quad A$$

$$I_{BC} = 22\angle -70^\circ$$

$$I_{CA} = 22\angle -190^\circ \quad A$$

$$I_A = 22\sqrt{3}\angle 20^\circ \quad A$$

$$I_B = 22\sqrt{3}\angle -100^\circ \quad A$$

$$I_C = 22\sqrt{3}\angle -220^\circ \quad A$$

القدرة فى الحمل المتزن .

القدرة المنفردة فى الحمل الثلاثى .

$$P = 3V_{ph}I_{ph}\cos\phi$$

فى حالة توصيلة $\curlywedge$

$$P = 3\frac{V_L}{\sqrt{3}}I_L\cos\phi$$

$$= \sqrt{3}V_L I_L\cos\phi$$

و فى حالة توصيلة Δ

$$P = 3V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\phi$$
$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos\phi$$

أى أنه فى جميع الحالات تكون القدرة $\sqrt{3} V_L I_L \cos\phi$ حيث ϕ هى الزاوية بين جهد الوجه و تيار الوجه .

فمثلاً إذا كان جهد الخط $440 \quad 0V$ و تيار الخط $2\angle -75^\circ$ فإن الزاوية ϕ بين جهد الوجه و تيار الوجه تساوى 45° و تكون القدرة

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos\phi$$
$$= \sqrt{3}\, 440 \times 2 \cos 45^\circ = 1677.8 watt$$

الأحمال الغير متزنة :-

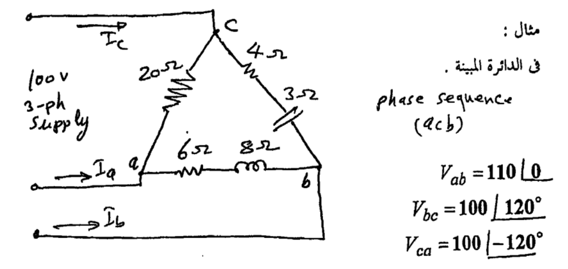
و هى الأحمال التى فيها تختلف معاوقة وجه أو أكثر من أوجه الحمل الثلاثى .

أولاً : توصيلة

و فيها يمكن حساب تيارات الأوجه مباشرة و يمكن الحصول على تيارات الخطوط بتطبيق قانون كيرتشوف للتيار على تيارات الأوجه

مثال :

فى الدائرة المبينة .



$$V_{ab} = 110 \angle 0$$
$$V_{bc} = 100 \angle 120^\circ$$
$$V_{ca} = 100 \angle -120^\circ$$

$$I_{ab} = \frac{100\ \ 0}{6+j8} = \frac{100+j0}{6+j8}$$

$$= 6-j8 = 10\ \ -53.1^\circ \quad A$$

$$I_{bc} = \frac{100\ 120}{4-j3} = \frac{-50+j86.6}{4-j3}$$

$$= -18.39+j7.856 = 20\ \ 156.9^\circ \quad A$$

$$I_{ca} = \frac{100\ \ \ -120}{20+j0} = -2.5-j4.33$$

$$= 5\ 120^\circ \quad A$$

و منها نحسب تيارات الخطوط

$$I_A = 6-j8+2.5+j4.33$$

$$= 8.5-j3.67 = 9.26\ -23.4^\circ \quad A$$

$$I_B = -2439+j15.856$$

$$= 29\ 146.9^\circ \quad A$$

$$I_c = 15.89-j12.186$$

$$= 20\ -37.3^\circ \quad A$$

ثانياً : توصيلة ⅄ الغير متزنة **Unbalanced ⅄ connected loads**

أ - إذا كانت نقطة التعادل للمصدر الثلاثى الأوجه متصلة بالنقطة المشتركة للحمل يكون النظام ذو أربعة أسلاك و تكون كل معاوقة عليها جهد ثابت هو جهد الوجه . مثال ذلك .

$$I_A = \frac{120\angle -90^\circ}{6\angle 0} = 20\angle -90^\circ \quad A$$

$$I_B = \frac{120\angle 30}{6\angle 30} = 20\angle 0 A$$

$$I_C = \frac{120\angle 150^\circ}{5\angle 45^\circ} = 24\angle 105^\circ \quad A$$

و يلاحظ ان سلك التعادل Neutral wire فى هذه الحالة يحمل تياراً يساوى مجمـــوع الثلاث تيارات المارة فى الخطوط .

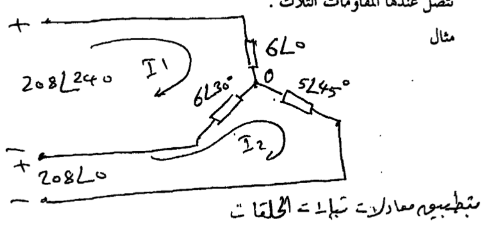
$$I_n = I_A + I_B + I_C$$

$$= 14.1\angle -166.9^\circ \quad A$$

ب- إذا كان النظام ذو ثلاثة أسلاك فقط 3-phase – 3 wire system

فإن الجهود على الثلاث معاوقات المكونة للحمل يمكن أن تتغير و يمكن حل الدائــرة فى هذه الحالة إما بإستخدام تيارات الحلقة أو معادلة جهد العقدة لتحديد جهد النقطة الـــتى تتصل عندها المقاومات الثلاث .

مثال



$$\begin{bmatrix} 208\angle 240^\circ \\ 208\angle 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\angle 0 + 6\angle 30 & -6\angle 30 \\ -6\angle 30^\circ & 6\angle 30^\circ + 5\angle 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$I_A = I_1 = 23 \angle 26.1^\circ$$
$$I_B = I_2 - I_1 = 26.5 \angle -63.4^\circ - 23.3 \angle 261.1^\circ$$
$$I_C = -I_2 = 26.5 \angle 116.6^\circ \quad A$$
$$I_B = 15.45 \angle -2.5^\circ \quad A$$

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة بحساب جهد النقطة 0 بالنسبة لنقطه التعادل بتطبيق KCL

$$\frac{V_A - V_O}{Z_A} + \frac{V_B - V_O}{Z_B} + \frac{V_C - V_O}{Z_C} = 0$$

$$V_O = \frac{V_A Y_A + Y_B Y_C + V_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

$$Y_A = \frac{208}{\sqrt{3}} \angle -90^\circ = 120 \angle -90^\circ$$
$$Y_B = 120 \angle 30^\circ$$
$$Y_C = 120 \angle 150^\circ$$
$$Y_A = \frac{1}{6 \angle 0} = 0.1667 S$$
$$Y_B = \frac{1}{6 \angle 30} = 0.1443 - J0.0833 S$$
$$Y_C = \frac{1}{5 \angle 45^\circ} = 0.1414 - J0.1414 S$$
$$V_O = 28 \angle 39.6^\circ \quad V$$
$$I_A = (V_A - V_O) Y_A = 23.2 \angle 261.1 \quad A$$
$$I_B = (V_B - v_O) Y_B = 15.4 \angle -2.9^\circ$$
$$I_C = (V_C - V_O) Y_C = 26.5 \angle 116.45 \quad A$$

تمارين ٨

8-1 Three phase 100 V ABC system are applied to three impedances $15.9\ \angle 90^\circ$ ohms connected in find the line currents and the total power.

8-2 A balanced star connected load with impedances $6\ \angle 45^\circ$ is connected to a 3 phase 4 wire 208 volt. ACB system find the line currents and the total power.

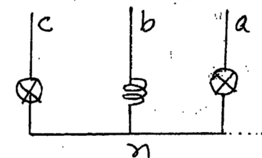
8-3 A balanced stare load with impedances $10\ \angle -30^\circ$ ohms are both connected to a 3 phase 3-wire 208 v. ABC system. Find the line currents, and the power in each load.

8-4 A delta connected load with $Z_{AB} = 10\ \angle 30^\circ$, $Z_{BC} = 25\ \angle 0$ and $Z_{CA} = 20\ \angle -30^\circ$ ohms is connected to 3-phase three wire 100 v. ABC system. Find the line currents and the total power.

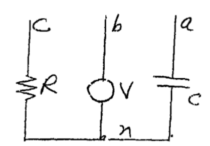
8-5 A star load with $Z_A = 3 + j0$, $Z_B = Z + j3$ and $Z_C = 2 - j1$ ohms is connected to a 3-ph. four wire 100 v. ABC system. Find also the total power.

8-6 A star load with $Z_A = 10\ \angle 0$, $Z_B = 10\ \angle 60$ and $Z_C = 10\ \angle 60^\circ$ is connected to 3 ph. 3 wire 200v. ABC system. Find the line carrents and the voltage across each load impedance, and the total power.

8-7 The circuit shown is used to check the phase sequence. If each lamp has a resistance of $100\ \Omega$ and the reactance of the coil is $100\ \angle 90^\circ\ \Omega$. Show that lamp a will be brighter if the phase sequences is ABC.



8-8 If $\frac{1}{w} = R$ show that the voltmeter reading is greater that than the line voltage if the phase sequences is ABC



8-9 A 3-phase source with a line voltage **45** kv. is connected to town lanced loads has a branch resistance of **50**Ω . The connected load has $Z = 10 + j20\pi$ and the connected load has a branch resistance of **50** Ω. The connected line currents, the resistance determine the line currents , the power delivered to the loads , and the power lost in the wires.

8-10 3 equal impedances each **30** **30**° are connected in to a 3-ph 3-wire **208** v system, by conductors which have impedances $0.8 + j0.8$ π each . what is the line voltage at the load.

الفصل التاسع

الرنين فى الدوائر الكهربية

Resonance in Electric Circuits

تحدث ظاهرة الرنين فى النظم الطبيعية عندما تكون القوة المؤثرة من النـــوع الدورى و يكون ترددها قريباً من التردد الطبيعى للنظام . حيث تزداد الإستجابة كلمـــا أقتربنا من التردد الطبيعى . و تحدث هذه الظاهرة فى النظم التى تحتوى على نوعين مـــن الطاقة مثلاً : طاقة وضع و طاقة حركة فى النظم الميكانيكية .

و فى الدوائر الكهربية لابد أن يكون هناك كلاً من الطاقة الكهربيةElectric Energy و الطاقة المغناطيسية Magnetic energy أى أن الدائرة لابد أن تحتوى على مكثفات و ملفات حث .

٩-١ تعريف الرنين

يمكن تعريف الرنين بانه التردد الذى يحدث عنده أقصى إستجابة فإذا سلط على الدائرة جهد دورى فإن الإستجابة تكون التيار و يحدث الرنين عند التردد الذى يكون عنده التيار قيمة عظمى . و يحدث هـــذا عندما تكون المعاوقة $|Z_{jw}|$ قيمة صغرى .

هناك تعريف أخر للرنين بانه التردد الذى يكون عنده المؤثر و الإستجابة فى أتفاق وجهى و على ذلك فإنه يسهل تحديد شرط الرنين فى الدائرة مباشرة من المعاوقـــة

أو المسامحة حيث نجد أن تردد الرنين هو التردد الذى تكون عنـــده المعاوقـــة أو المسامحة للدائرة قيمة حقيقية فقط .

فإذا كانت

$$Z_{jw} = R + jX_w$$

و

$$Y_{jw} = G + jB_w$$

فإن شرط الرنين هو

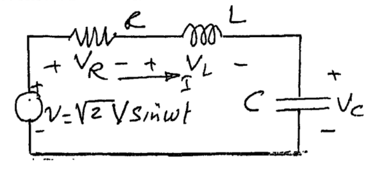
$$\mathbf{Im}\ \ Z_{jw} = \mathbf{0}$$
$$X_w = \mathbf{0}$$

أو

$$\mathbf{Im}\ \ Y_{jw} = \mathbf{0}$$
$$B_w = \mathbf{0}$$

٩-٢ دائرة رنين التوالى

The Series Resonance circuit



الشكل يبين صورة بسيطة من دوائر الرنين حيث المقاومة R تمثل جميع المقاومات المتصلة على التوالى فى الدائرة و تشمل مقاومة المصدر و الفقد فى الملف و الفقد فى المكثف . و المصدر المؤثر على الدائرة هو مصدر جهد ذو قيمة فعالة ثابتة V و ترد متغير f

من الدائرة نجد أن

$$Z = \frac{V}{I} = R + j\left(wl = \frac{1}{wc}\right)$$
$$= |Z|\ \ e^{j\phi}$$

حيث

$$|Z| = \sqrt{R^2\left(wl - \frac{1}{wc}\right)^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{wl - \frac{1}{wl}}{R}$$

و نحصل على تردد الرنين طبقاً للتعريف بمساواة الجزء التخيلى للمعاوقة بالصفر .

$$WL - \frac{1}{WC} = 0$$

$$W = Wo = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$F = Fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

و عند هذا التردد نكون

$$Z = R$$
$$\phi = O$$
$$I = \frac{V}{R}$$

آمن
و عند اى تردد W يكون التيار I

$$I = \frac{V}{R + j\left(WL - \frac{1}{wc}\right)}$$

$$|I| = \frac{V}{\sqrt{R + \left(WL - \frac{1}{wc}\right)^2}}$$

$$V = V_R + V_L + V_C$$

$$V_R = I_R \quad , \quad V_L = jWLI \qquad , \qquad V_C = \frac{-jI}{WC}$$

و نلاحظ أنه عند تردد الرنين W_0 تكون المعاوقة قيمة صغرى و يكون التيار قيمة عظمى.
و تكون قيم مركبات الجهد عند الرنين .

$$V_R = V$$

$$V_L = w_\circ L\frac{V}{R} = \frac{w_\circ L}{R}V$$

$$V_C = \frac{1}{w_\circ}L\frac{V}{R} = \frac{1}{w_\circ CR}V$$

و بالتعويض عن $w_\circ = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ نجد أن

$$V_L = V_C = QV$$

$$Q = \frac{w_\circ L}{R} = \frac{1}{w_\circ CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

و العامل Q له أهمية خاصة فى دوائر الرنين و يعرف بمعامل الجودة او بمعامل تكبير الجهد
.

فإذا كانت R صغيرة بالنسبة إلى $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ تكون Q كبيرة و يكون الجهد على كل من
المكثف و المحاثة عند الرنين أعلى كثيراً من الجهد المسلط على الدائرة

٩-٣ معامل الجودة Q The Quality factor

يعرف معامل الجودة Q بأنه النسبة بين المفاعلة و المقاومة للعنصر فإذا كان ملف
الحث له مفاعلة wL و مقاومة R_L فإن معامل الجودة للملف يكون $Q = wL/R_L$

و بصفة عامة يمكن التعبير عن Q بدلالة كفاءة الدائرة فى تخزين الطاقة الكهربية أو الطاقة المغناطيسية عند تغذيتها من مصدر متردد الجهد . و فى هذه الحالة يكون تعريف Q كالاتى :-

$$Q = 2\pi \frac{W_m}{w}$$

حيث W_m هى القيمة العظمى للطاقة المخزنة فى الدائرة أثناء دورة واحدة ، w هى الطاقة المفقودة أثناء هذه الدورة . اى أن

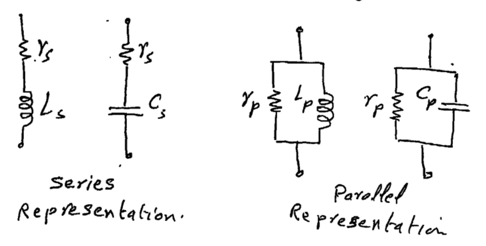
$w = PT$ حيث P هى القدرة ، T زمن الدورة

$$Q = 2\pi \frac{W_m}{PT} = w\frac{W_m}{P}$$

حيث w هى الجزء الزاوى $w = \frac{2\pi}{T}$ أى أن .

$$Q = \frac{\textbf{Maximimum Energy stored}}{\textbf{Energy dissipaled per second}}$$

فى الدوائر الحقيقية لا يمكن الحصول على مفاعلة نقية سواء المكثفات أو فى ملفات الحث حيث انه لابد من وجود بعض الفقد فى العنصر و يتم التعبير عن هذا الفقد بمقاومة توصل على التوالى أو على التوازى مع المفاعلة . و عادة ما يتم تمثيل المكثفات و الملفات بدوائر مكافئة كما فى الشكل .



فى جميع الأحوال يمكن تعريف معامل القدرة من تعريف الطاقة .

مثال :

فى حالة المحاثة إذا كان التيار المار بها $I = I_m \sin vt$ تكون أقصى طاقة مخزنة $\frac{1}{2}LI_m{}^2$ و تكون الطاقة المفقودة $\frac{1}{2}I_m{}^2$

$$Q_{LS} = wL/r_s$$

و بنفس الطريقة يمكن حساب معامل الجودة للأشكال الاخرى حيث نجد أن فى حالة التمثيل التوالى للمكثف .

$$Q_{CS} = \frac{t}{wC_s r_s}$$

و فى حالة التمثيل التوزاى للملف

$$Q_{LP} = \frac{r_p}{w_r L_p}$$

و فى حالة التمثيل التوازى للمكثف

$$Q_{LP} = wr_p c_p$$

فى حالة العناصر المتصلة مع بعضها فإننا نحسب معامل الجودة بإستخدام نفس التعريف فمثلاً فى حالة دائرة التوالى

إذا كان التيار $i = \sqrt{2}I \sin wt$ فإن الطاقة المخزنة فى المكثف .

$$w_{cmax} = CV_c{}^2 = C\frac{I^2}{w^2 c^2}$$

و الطاقة المخزنة فى الملف .

$$W_{L\,\max} = LI^2$$

و القدرة المفقودة

$$P = I^2 R$$

و يعتمد حساب معامل الجودة على اى القيمتين للطاقة المخزنة أكبر فعند الترددات أقل من تردد الرنين $f < f_o$

تكون $Wc_{\max} > W_{L\ \max}$

و تكون $Q = w\dfrac{W_{c\ \max}}{P} = \dfrac{1}{WCR}$

أما فى حالة $w > w_{\circ}$

$$Q = \frac{wL}{R}$$

و عند الرنين تتساوى الطاقة المخزنة فى الملف مع الطاقة المخزنة فى المكثف و تكون

$$Q = \frac{w_{\circ}L}{R} = \frac{1}{w_{\circ}CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{C}}$$

مثال :

لحساب تردد الرنين للدائرة المبينة نجد أن الدائرة تكون فى حالة رنين إذا كانت $wL = \dfrac{1}{wc}$ حيث يكون الفرع العلوى قيمة حقيقية R_1

و لحساب معامل الجودة

$$W_{\max} = LI_1^{\,2}$$

$$P = I_1^{\,2}R_1 + I_2^{\,2}R_2$$

و حيث أنه عند الرنين فإن $I_1R_1 = I_2R_2$

$$P = I_1^{\,2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$Q = \frac{w_{\circ}LI_1^{\,2}}{I_1^{\,2}R_1\left(1 + {R_1}/{R_2}\right)} = \frac{w_{\circ}L}{R_1}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

مثال :
لحساب تردد
الرنين للدائرة .

$$Z=\frac{R_1\times\frac{1}{jwc}}{R_1+\frac{1}{jwc}}+R_2+wL$$

$$=R_1+\left(\frac{R_1}{1+w^2c^2R_1{}^2}\right)+j\left(wl-\frac{wcR_1{}^2}{1+w^2c^2R_1{}^2}\right)$$

عند تردد الرنين نضع الجزء التخيلي لـــ Z مساوياً للصفر

$$wL-\frac{wcR_1{}^2}{1+w^2c^2R_1{}^2}=0$$

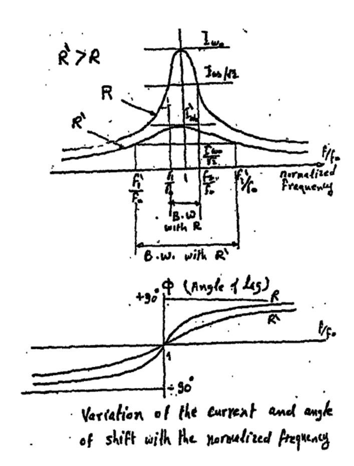
$$w=w_\circ=\sqrt{\frac{1}{Lc}-\frac{1}{c^2R_1{}^2}}$$

أيضاً يمكن حساب معامل الجودة .

$$Q=\frac{w_\circ L}{\textbf{Real}\,L2}=\frac{w_\circ L}{R_2+\frac{R_1}{1+w^2c^2R_1{}^2}}$$

٩–٤ الانتقائية . Selectivity

إذا رسمنا تغير التيار I و الزاوية ϕ مع $\left(\frac{f}{f_\circ}\right)$ التردد نحصل على الأشكال المبينة .



Variation of the current and angle of shift with the normalized frequency

من الرسم نجد أن منحنى التيار له قيمة عظمى عند $f = f_0$ أى عندما $f/f_0 = 1$ كما نلاحظ أن منحنى التيار للقيمة الأكبر للمقاومة يكون أكثر تسطيحاً من القيمة الصغيرة للمقاومة . و منها نجد ان قدرة الدائرة على انتقاء ترددات معينة يزداد بنقصان قيمة المقاومة .

و كمقياس للإنتقائية . فإننا نحدد مدى الترددات التى يكون فيها التيار أكبر من نسبة معينة من القيمة العظمى و هذه النسبة $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من القيمة العظمى للتيار فنجد أن هذا المدى محصور بين ترددين f_1, f_2 ، حيث نجد عند كل منهما أن المفاعلة $wL - \frac{1}{wc}$ تكون مساوية للمقاومة R و لحساب f_1 ، f_2 نجد أن .

عند f_1 قبل تردد الرنين

$$\frac{1}{w_1 c} - w_1 L = R$$

و عند f_2 بعد تردد الرنين .

$$w_2 L - \frac{1}{w_2 c} = R$$

من المعادلتين السابقتين نجد أن .

$$w_1 = w_\circ \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \right]$$

$$w_2 = w_\circ \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \right]$$

حيث

$$w_\circ = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = \frac{w_\circ L}{R}$$

كما نلاحظ أن

$$w_1 w_2 = w_\circ^{\,2}$$

أو

$$f_1 f_2 = f_\circ^{\,2}$$

و أيضاً

$$w_1 - w_2 = \frac{w_\circ}{Q}$$

أو

$$f_2 - f_1 = f_2 / Q$$

و تعرف القيمة $f_2 - f_1$ بأنها أتساع النطاق للدائرة Bandwidth

$$BW = \frac{f_\circ}{Q}$$

أى أن الدوائر ذات قيم Q عالية يكون إتساع النطاق بها ضيقاً و إذا كانت $Q > 10$ فإننا نجد أن

$$w_1 \approx w_\circ - \frac{Bw}{2} \quad \text{و} \quad w_2 \approx w_\circ + \frac{Bw}{2}$$

مثال :

فى الدائرة المبينة و المكونة من مصدر جهد مقاومته الداخلية 50π على التوالى مع ملف حقيقى و مكثف حقيقى نجد أن

تردد الرنين .

$L = 200\mu H$

$Q_L = 120$

$C = 56.3\ pf$

$Q_C = 10^4$

$\tan\delta = 10^{-4}$

$$f_\circ = \frac{1}{2\pi\sqrt{Lc}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{200\times10^{-6}\times65.3\times10^{-12}}}$$

$$= 1.5MHz$$

$$r_c = \frac{1}{w_\circ c Q_c} = 0.19 \quad \pi$$

$$r_L = \frac{w_\circ L}{Q_L} = 15.71 \quad \pi$$

المقاومة الكلية فى الدائرة .

$$R = r_g + r_L + r_c = 50 + 0.19 + 15.71 = 65.9 \quad \pi$$

التيار عند الرنين

$$I_{w_\circ} = \frac{V}{R} = \frac{1}{65.9} = 15.17 \quad mA$$

القدرة المفقودة

$$P = I^2 R = 15.17 \quad mw$$

معامل القدرة .

$$Pf = \frac{\text{power}}{V.A} = 1$$

الجهد على الملف عند الرنين .

$$V_L = I_{vo}(r_L + jwL)$$
$$= 0.238 + j28.6 \ v$$

الجهد على المكثف عند الرنين

$$V_c = I_{vo}\left(r_c + j\frac{1}{wc}\right)$$
$$= 0.0029 - j28.6 \ \ v$$

و يجب أن نلاحظ أن الجهد على المحاثة L يساوى فى المقدر و إيضاً فى الإتجاه الجهد على السعة c

معامل الجودة للدائرة $Q = \frac{w_\circ L}{R} = \frac{1}{w_\circ CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

إتساع النطاق

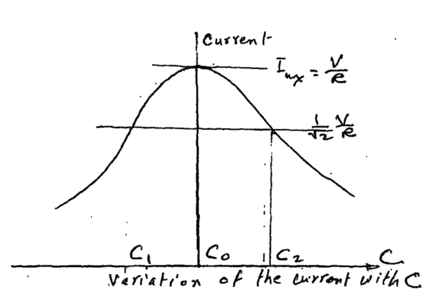
$$Bw = \frac{f_\circ}{Q} = \frac{1.5 \times 10^6}{28.6}$$
$$= 25.43 \quad KHz$$

٩-٥ التوليف **Tuning**

عند ثبات التردد يمكن الوصول إلى حالة الرنين بتغير المحاثة L أو بتغيير السعة C و يعرف تغيير L أو C بتوليف الدائرة و عادة يكون تغيير C أسهل من تغيير Lو لذلك فإن التوليف بإستخدام مكثف متغير هو الأكثر شيوعاً . و فى هذه الحالة يكون تغير التيار مع Cطبقاً للعلاقة

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}}$$

فإذا رسمنا هذه العلاقة تظهر كما بالشكل .



و تحدث القيمة العظمى للتيار عند $C = C_o$ حيث $wL - \frac{1}{wC_o} = 0$

و النقطتان الذى عندهما يهبط التيار إلى $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من قيمته العظمى تكون مناظرتان للقيم C_1 ، C_2 اللتان تجعلا مفاعلة الدائرة مساوين للمقاومة . اى انه

$$\frac{1}{wc_1} - wL = R$$

$$wL - \frac{1}{wc_2} = R$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على

$$Q = \frac{wL}{R} = \frac{1}{wc_oR} = \frac{C_1 + C_2}{C_2 - C_1}$$

٩٠-٦ دوائر الرنين توازى **Parallel Resonance Circuits**

$$Y = \frac{I}{V} G + j\left(wc + \frac{1}{wc}\right)$$

$$= |\dot{Y}| e^{j\phi}$$

حيث

$$|Y| = \sqrt{G^2 \left(wc - \frac{1}{wL} \right)^2}$$

$$\phi' = arc \ \tan \frac{wc - \frac{1}{wc}}{G}$$

و يحدث الرنين عندما

$$wc = \frac{1}{wc}$$

$$w = w_\circ = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

و عند الرنين يكون الجهد على الدائرة .

$$V_{w_\circ} = \frac{I}{G} = IR$$

و تكون مركبات التيار

$$I_R = I$$

$$I_L = \frac{-jV_{w_\circ}}{w_\circ L} = -j \frac{R}{w_\circ L} I = -j \frac{R}{\sqrt{L/c}} I$$

أى أن $I_L = -I_C \ , \frac{|I_c|}{I} = \frac{|I_c|}{1} = R / \sqrt{L/C}$

و عند الرنين تكون $Y = G$ أى قيمة صغرى و بذلك تكون $Z = \frac{1}{Y}$ = قيمة عظمى .

و عند الرنين يكون معامل الجودة Q للدائرة .

$$Q = W_\circ CR = \frac{R}{w_\circ L} = R / \sqrt{L/C}$$

و كلما كانت Q عالية تكون إنتقائية الدائرة عاليه و يعرف إتساع النطاق .

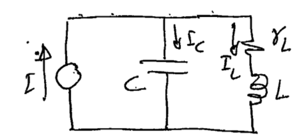
$$Bw = F_0/Q$$

و يكون تردد القطع العلوى F_2 و تردد القطاع السفلى F_1 كما فى حالة التوالى

$$w_2 = w_\circ\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{w_\circ}{2Q}$$

$$w_1 = w_\circ\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{w_\circ}{2Q}$$

٩-٧ دائرة التوازى العملية Practical Parallel Resonance



فى الدائرة العملية يكون الفقد فى المكثف صغير جداً و يمكن إهماله و تمثيل ملف الحث بمقاومة و محاثة على التوالى .

$$Y = Y_L + Y_C$$

$$= \frac{1}{r_2 + jwL} + jwc$$

عند الرنين يكون الجزء التخيلى لـ $\text{Im } Y = 0$

$$Y = \frac{r_L}{{r_L}^2 + w^2L^2} + j\left(wc - \frac{wL}{r^2 + w^2L^2}\right)$$

$$wc = \frac{wL}{{r_L}^2 + w^2L^2}$$

$$w = w_\circ = \frac{1}{\sqrt{Lc}}\sqrt{1 - \frac{c}{L}{r_L}^2}$$

عند $w = w_o$ تكون المسامحة مساوية لـ

$$Y = Y_D = \frac{r_L}{{r_L}^2 + w^2 L^2} = \frac{C r_L}{L}$$

و المعاوقة = $\frac{1}{Y_D}$

$$Z_D = \frac{L}{C r_L} = R_D.$$

. تعرف بالمقاومة الديناميكية للدائرة Dynamic Resistance

$$Z_D = \frac{w_o L}{W_o C r_L} = {Q_L}^2 r_L$$

حيث $w_o L = \frac{1}{w_o C}$ إذا كانت قيمة Q مرتفعة

و فى هذه الحالة يمكن تمثيل الدائرة عند الرنين كما فى الشكل

فإذا وصلت الدائرة مع مصدر تيار له مقاومة داخلية R_g فإن المقاومة الفعالة للدائرة تكون هى R_g على التوازى مع Z_D

$$R_{eff} = \frac{R_g Z_D}{R_g + Z_D}$$

و يكون معامل الجودة للدائرة .

$$Q_{eff} = \frac{\mathbf{Re}\,ff}{wL}$$

مثال : -

مصدر تيار $I = 0.1 \quad A$ متغير التردد و له مقاومة داخلية $750K\Omega$ وصل على دائرة رنين كالمبينة بالشكل

أحسب تردد الرنين

-المقاومة الديناميكية للدائرة

-معامل الجودة و إتساع النطاق

$r_L = 200\Omega \quad L = 5\,mH$

-. الجهد على طرف الدائرة عند الرنين

$$C = 50 \quad pf$$
$$r_L = 200 \ \Omega \quad L = 5 \quad mh$$

تردد الرنين

$$w_\circ = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{C}{L} {r_L}^2}$$
$$f_\circ = \frac{1}{2\pi\sqrt{5\times10^{-3}\times50\times10^{-12}}} \sqrt{1 \frac{50\times10^{12}}{5\times10^{-3}} (200)^2}$$
$$= 318.3 \quad KHz$$

المقاومة الديناميكية .

$$Z_D = \frac{L}{Cr_L} = \frac{50\times10^{-3}}{50\times10^{-12}\times200} = 500 \quad KL$$

معامل الجودة

$$Q_L = \frac{w_\circ L}{r_L} = 50$$

المقاومة المؤثرة فى الدائرة .

$$R_{eff} = Z_D \,//\, 750 \quad k$$
$$= \frac{500\times750}{500+750} = 300 \quad K\Omega$$

معامل الجودة للدائرة الكلية .

$$Q_{eff} = \frac{R_{Lt}}{w_\circ L} = \frac{300\times10^3}{w_\circ L} = 30$$

إتساع النطاق

$$BW = f_\circ / Q_{eff} = \frac{318.3}{30} = 10.61 \quad KHz$$
$$V_{w_\circ} = IR_{eff} = 0.1\times300 = 30 \quad volt$$

٩-٨ تمـــارين

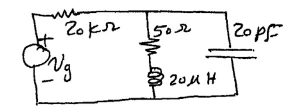
9-1 A series resonce ciruit has R=2 L=1mH C=0.1 uf. Find w_o, BW and Q. Find I_{w_o} at $w = 1.1\ w_o$

9-2 A series resonance circuit has $L = 10\ mH$. Select C and R so that the circuit at $w_o = 10$ rad/sec. And to have $BW = 10$ red/sec

9-3 For the series RLC resonance circuit, find an expression for the frequency at which the voltage across the capacitor is maximum

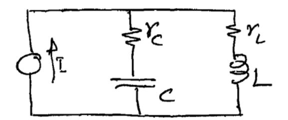
9-4 For a parallel RLC circuit with $R = 10\ K$, $L = 1/120\ H$ & $C = 1/30\ \mu f$. Find w_o, Q, w and w_2

9-5 for the circuit shown find the Q factor of the coil at resonance, the dynamic resistance and the BW



9-6 for the parallel RLC circuit, find an expression for the reactance of the circuit the reactance of the circuit and draw the variation of reactance with frequency.

9-7 find an expression for the resonant frequency of the circuit.



9-8 For the parallel RLC circuit, find an expression for the frequency at which the current in the capacitor is maximum

زائـــــدة

APPENDIX

11-18 Repeat Prob. 11-17 for

(a) $\dfrac{(-5\angle 30^\circ)(14.7\angle -50^\circ)}{(0.01\angle -60^\circ)(-222\angle -30^\circ)}$

(b) $\dfrac{(7.6\angle -24^\circ)(-3+j5)}{(1+j1)(3-j4)}$

(c) $\dfrac{(2.1\angle 40^\circ)^3(-3+j2)^2}{14-j6-20\angle 30^\circ}$

11-19 Find a single sine term equivalent of each of the following.

(a) $3\sin\omega t + 4\cos\omega t$
(b) $8\sin 377t + 8\cos 377t$
(c) $3\sin(377t+45^\circ) - 4\cos(377t+45^\circ)$
(d) $3\sin(377t+45^\circ) + 4\cos(377t+45^\circ)$
(e) $5\sin(2t+30^\circ) + 6\sin(2t+60^\circ) - 2\cos(2t-30^\circ)$
(f) $-4\sin 2t + 6\cos 2t - 8\sin(2t-45^\circ)$
(g) $4\cos 377t + 3\sin 2t$

11-20 Repeat Prob. 11-19 for

(a) $4\sin 2t + 6\sin(2t-30^\circ)$
(b) $6\sin 2t + 8\cos 2t$
(c) $6\sin(377t+30^\circ) + 8\cos(377t+30^\circ)$
(d) $10\sin(2t-30^\circ) + 8\sin(2t+60^\circ) - 4\sin 2t$
(e) $5\sin(377t+30^\circ) + 6\cos(377t-60^\circ) + 11\sin(377t-150^\circ)$
(f) $6.5\cos 2t - 3.8\sin 2t - 7.4\cos(2t-30^\circ)$
(g) $10\sin 377t - 4\cos 754t$

11-21 Find phasors corresponding to the following.

(a) $10\sqrt{2}\sin\omega t$
(b) $10\sqrt{2}\cos\omega t$
(c) $25\sqrt{2}\sin(20t+30^\circ)$
(d) $120\sqrt{2}\cos(377t-45^\circ)$
(e) $-50\sin(2t-60^\circ)$
(f) $0.25\cos(4t+100^\circ)$

11-22 Repeat Prob. 11-21 for

(a) $50\sqrt{2}\sin\omega t$
(b) $50\sqrt{2}\cos\omega t$
(c) $3.5\sqrt{2}\sin(3t-45^\circ)$
(d) $115\sqrt{2}\cos(377t+60^\circ)$
(e) $-100\cos(4t+135^\circ)$
(f) $0.69\sin(6t-30^\circ)$

11-23 Find the sinusoidal voltages and currents corresponding to the following phasors. The frequency is 60 Hz.

(a) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ$ V
(b) $115\angle 45^\circ$ V
(c) $-0.12\angle -60^\circ$ V

(f) $-0.01 - j0.025$
(g) $4000 - j3000$
(h) $-22 + j1000$
(i) $-26 - j43$

11-12 Repeat Prob. 11-11 for

(a) $10 + j10$
(b) $20 + j20$
(c) $120 - j26$
(d) $-60 + j95$
(e) $0.026 - j0.052$
(f) $-6000 - j9000$
(g) $-700 + j10$
(h) $j22.5$
(i) $-j56$

11-13 Find the products in polar form.

(a) $(4\angle 20^\circ)(-6\angle -20^\circ)(8\angle -20^\circ)$
(b) $(6\angle -30^\circ)(3 + j4)(9\angle -30^\circ)(4 - j6)$
(c) $(0.01\angle 45^\circ)(6 - j9)(1000\angle -22^\circ)(-4 + j8)$

11-14 Repeat Prob. 11-13 for

(a) $(-15\angle 30^\circ)(22.5\angle 175^\circ)(-16\angle -420^\circ)$
(b) $(20 - j10)(20\angle 45^\circ)(8\angle -30^\circ)(-4 + j8)$
(c) $(0.06\angle -60^\circ)(-20 + j10)(200\angle -30^\circ)(40 - j10)$

11-15 Evaluate the following determinants.

(a) $\begin{vmatrix} 3 + j2 & -j1 \\ -j1 & 4 - j5 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 6 - j8 & 4\angle -50^\circ \\ -j6 & 6\angle 30^\circ \end{vmatrix}$

11-16 Repeat Prob. 11-15 for

(a) $\begin{vmatrix} 6 + j2 & 5 + j4 \\ -3 + j1 & 8 - j6 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 16\angle -45^\circ & 3 + j1 \\ 10\angle 20^\circ & 4 + j2 \end{vmatrix}$

11-17 Find the quotients in polar form.

(a) $\dfrac{(4\angle 20^\circ)(6\angle -30^\circ)}{(-8\angle -100^\circ)(1.6\angle 45^\circ)}$

(b) $\dfrac{(5\angle -30^\circ)(4 - j6)}{(3 - j4)(2.3\angle 80^\circ)}$

(c) $\dfrac{(6.1\angle -20^\circ)^3(-4 + j5)}{20 - j10 - (6 + j8)}$

1-6 Repeat Prob. 11-5 for

(a) $\dfrac{4 + j2}{6 + j5} + \dfrac{2 + j1}{3 + j4}$

(b) $\dfrac{4 - j5}{-3 + j4} + \dfrac{-6 + j2}{-4 - j5}$

1-7 Convert the following to rectangular form.

(a) $10\angle 60^\circ$
(b) $10\angle -60^\circ$
(c) $10\angle 120^\circ$
(d) $10\angle -120^\circ$
(e) $10\angle 300^\circ$
(f) $228\angle -45^\circ$
(g) $64.7\angle 130^\circ$
(h) $-100\angle 300^\circ$
(i) $3000\angle 420^\circ$

1-8 Repeat Prob. 11-7 for

(a) $30\angle 30^\circ$
(b) $30\angle 390^\circ$
(c) $30\angle -30^\circ$
(d) $30\angle 150^\circ$
(e) $-30\angle -30^\circ$
(f) $-6.69\angle 125^\circ$
(g) $4000\angle -135^\circ$
(h) $22.6\angle -60^\circ$
(i) $2605\angle 375^\circ$

1-9 Simplify each of the following to a complex number in rectangular form.

(a) $4\angle 45^\circ + 6\angle -135^\circ$
(b) $8\angle 0^\circ + 20\angle 180^\circ - 15\angle -180^\circ + 6\angle 90^\circ + 15\angle -90^\circ$
(c) $3\angle 20^\circ + 4\angle -30^\circ + 5\angle 60^\circ$
(d) $4\angle -45^\circ + 8\angle 30^\circ - 10\angle 60^\circ + 20\angle 135^\circ$

11-10 Repeat Prob. 11-9 for

(a) $6\angle 30^\circ + 12\angle -150^\circ$
(b) $10\angle 0^\circ - 30\angle 180^\circ + 40\angle -180^\circ + 50\angle 90^\circ - 10\angle -90^\circ$
(c) $4\angle -30^\circ - 6\angle 45^\circ + 8\angle 60^\circ$
(d) $8\angle -135^\circ + 10\angle 30^\circ - 15\angle -155^\circ + 22\angle 130^\circ$

1-11 Convert the following to polar form.

(a) $4 + j3$
(b) $8 + j6$
(c) $1 - j1$
(d) $-10 + j10$
(e) $-100 + j50$

PROBLEMS

11-1 Plot the following complex numbers on the complex plane.

(a) $3 + j4$
(b) $3 - j4$
(c) $-3 + j4$
(d) $-3 - j4$
(e) $j5$
(f) $-j5$
(g) 5
(h) -5

11-2 What do all the complex numbers in Prob. 11-1 have in common?

11-3 Simplify each of the following to a complex number in rectangular form.

(a) $(3 + j4) + (-6 + j2) - (10 - j3)$
(b) $4 + j6 - j10 - 22 + 4 - j3 - (6 + j8)$
(c) $(3 + j4)(3 - j4)$
(d) $(-3 + j4)(3 + j4)$
(e) $(5 + j2)(-6 + j4)(j9)(7 - j5)$
(f) $(2 + j1)(-3 - j4)(6 - j4)(-7 + j2)$
(g) $(7 + j8)/j2$
(h) $(6 - j8)/(4 - j3)$
(i) $[(7 - j2)(4 + j3)]/[(3 - j6)(4 - j4)]$
(j) $[(6 + j4)(-8 - j14)(7 - j12)]/[(4 + j2)(-6 + j5)(4 - j4)]$

11-4 Repeat Prob. 11-3 for

(a) $(4 - j3) - (-5 + j10) + (11 - j6)$
(b) $16 - j19 + 34 + j25 - (18 - j24)$
(c) $(4 - j2)(4 + j2)$
(d) $(-4 - j2)(4 - j2)$
(e) $(8 - j9)(3 - j5)(j6)$
(f) $(1 + j1)(3 - j3)(-6 + j2)(-4 - j5)$
(g) $(4 - j6)/(-j2)$
(h) $(-5 + j7)/(6 - j4)$
(i) $[(3 - j2)(2 + j1)]/[(-1 + j2)(-2 - j3)]$
(j) $[(2 + j4)(3 - j5)(-1 - j1)]/[(2 - j1)(-3 + j3)(-2 + j2)]$

11-5 Express each of the following as a ratio of two complex numbers in rectangular form.

(a) $\dfrac{3 + j2}{1 - j7} + \dfrac{4 - j5}{6 - j3}$

(b) $\dfrac{4 - j7}{-2 + j3} + \dfrac{3 - j2}{-5 - j4}$

Unfortunately, there is some slight disagreement on the definition of phasor. Some circuit experts define phasors as the complex numbers used in this section. But many consider the phasor to have a magnitude that is not the peak, but rather the rms value. This is a reasonable choice because we often designate sinusoidal voltages and currents by their rms values instead of their peak values. Also, most ac meters indicate rms rather than peak values.

The lack of agreement is more than just on whether to use the peak or rms values for phasor magnitudes. It also extends to whether to base phasors on sine terms or cosine terms. Again this is reasonable because there is a cosine development completely parallel to our sine development. Many circuit experts use the cosine base and also the peak value.

In this book we will use the sine basis and rms value for phasors because this is the most popular definition. So, to find a phasor corresponding to a sinusoid we will add just one step to what we have been doing, and that step is to divide the peak value by the square root of 2. And to go from a phasor to a sinusoid, we will have to remember to multiply the phasor magnitude by the square root of 2 to get the peak value.

Example. Find phasors corresponding to the following sinusoids:

(a) $v = 30 \sin (100t + 10°)$ V
(b) $v = -50 \cos (377t - 45°)$ V
(c) $i = 676 \cos (2513t + 110°)$ A

Solution.

(a) $\mathbf{V} = \dfrac{30}{\sqrt{2}} \underline{/10°} = 21.2\underline{/10°}$ V

(b) $\mathbf{V} = -\dfrac{50}{\sqrt{2}} \underline{/-45° + 90°} = -35.4\underline{/45°}$ V

(c) $\mathbf{I} = \dfrac{676}{\sqrt{2}} \underline{/110° + 90°} = 478\underline{/200°} = -478\underline{/20°}$ A

Example. Find the sinusoids corresponding to the following phasors and frequencies:

(a) $\mathbf{V} = 10\underline{/20°}$ V and $f = 100$ Hz
(b) $\mathbf{I} = 20\underline{/-45°}$ A and $f = 60$ Hz
(c) $\mathbf{V} = -30\underline{/-30°}$ V and $\omega = 200$ rad/s

Solution. For parts (a) and (b) we must convert from hertz to radians per second using $\omega = 2\pi f$. And for all three parts we must multiply the rms values by $\sqrt{2}$ to get the peak values. Then,

(a) $v = (10)(\sqrt{2}) \sin (2\pi 100t + 20°) = 14.1 \sin (628t + 20°)$ V
(b) $i = (20)(\sqrt{2}) \sin (2\pi 60t - 45°) = 28.3 \sin (377t - 45°)$ A
(c) $v = (-30)(\sqrt{2}) \sin (200t - 30°) = -42.4 \sin (200t - 30°)$ V

Incidentally, although phasors are most often thought of as being in polar form, they can be in rectangular form as well. After all, they are complex numbers.



Example. What is the voltage v across the current source in the network of Fig. 11-7?

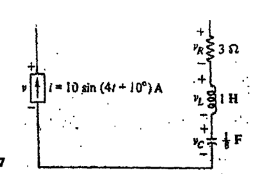


FIGURE 11-7

Solution. The voltage v equals the sum of the voltage drops, top to bottom, across the three components. From our studies we know how to find each of these voltages. The resistor voltage is in phase with the current and has a peak of $3 \times 10 = 30$ V: $v_R = 30 \sin (4t + 10°)$ V. The inductor voltage has a peak of $\omega L = 4 \times 1 = 4$ times the current peak and it leads the current by 90°: $v_L = (4)(10) \sin (4t + 10° + 90°) = 40 \sin (4t + 100°)$ V. And the capacitor voltage has a peak of

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{4 \times 1/8} = 2$$

times the current peak and lags the current by 90°: $v_C = (2)(10) \sin (4t + 10° - 90°) = 20 \sin (4t - 80°)$ V.

The voltage v across the current source is the sum of these voltages:

$$\therefore v = 30 \sin (4t + 10°) + 40 \sin (4t + 100°) + 20 \sin (4t - 80°) \text{ V}$$

To sum these sine terms we find the corresponding complex numbers and add them:

$$30\angle 10° + 40\angle 100° + 20\angle -80° = (29.5 + j5.21) + (-6.95 + j39.4) + (3.47 - j19.7)$$

$$= 26.1 + j24.9$$

Then we convert this sum to polar form:

$$26.1 + j24.9 = 36.1\angle 43.7°$$

Finally, we get the corresponding sinusoid:

$$= 36.1 \sin (4t + 43.7°) \text{ V}$$

In adding sinusoids we will use these complex numbers so frequently that they will soon take on physical significance in themselves. In fact, in our future work we will sometimes consider an analysis to be complete when we have the complex number corresponding to the voltage or current of interest, and will go no farther. Anyway, it is a trivial matter to complete the final step and get the actual sinusoid. Also, in many applications only the rms value and possibly the phase angle may be of interest. And we can get these from the complex numbers.

These complex numbers corresponding to sinusoids are called *phasors*. Not all complex numbers, though, are phasors—just those corresponding to sinusoids.

rectangular form. Even though we considered the addition of only two sine terms, the same method works regardless of the number of sine terms.

From this discussion we conclude that to add two or more sinusoids of the *same frequency*, we can

(1) Convert all the sinusoids to sine terms.
(2) For each sine term form a complex number in polar form, the magnitude of which is the peak value and the angle of which is the phase angle.
(3) Convert these complex numbers to rectangular form and add them, and then convert this sum to polar form.
(4) Form a sine term from this polar number and the ω of the original sinusoids. The magnitude of the polar number is the sine-term peak and the angle is the sine-term phase angle. Of course, ω is its radian frequency. This resulting sine term is the sum of the original sinusoids.

Example. What is the single sine-term equivalent of $3\sin(2t+30°)+4\sin(2t+60°)$?

Solution. We can go immediately to step 2 because the terms to be added are already in sine form. From step 2 the two complex numbers are $3/\underline{30°}$ and $4/\underline{60°}$. We convert these to rectangular form and then add them:

$$3/\underline{30°}+4/\underline{60°}=(2.6+j1.5)+(2+j3.46)=4.6+j4.96$$

Next, we convert this sum to polar form: $4.6+j4.96=6.76/\underline{47.2°}$. This result tells us that the sum sine term has a peak value of 6.76 and a phase angle of 47.2°. The only other information needed is the radian frequency, which is $\omega=2$ rad/s, as in the original sinusoids. Consequently,

$$3\sin(2t+30°)+4\sin(2t+60°)=6.76\sin(2t+47.2°)$$

Example. Find the single sine term equivalent to $10\sin(7t+45°)+6\cos(7t-30°)-8\sin(7t-50°)+3\cos(7t+20°)$.

Solution. The first step is to convert the two cosine terms to sine terms. We do this by adding 90° to the phase angles: $6\cos(7t-30°)=6\sin(7t+60°)$ and $3\cos(7t+20°)=3\sin(7t+110°)$. Then the sum becomes

$$10\sin(7t+45°)+6\sin(7t+60°)-8\sin(7t-50°)+3\sin(7t+110°)$$

Next we find the corresponding complex numbers and add:

$$\begin{aligned}10/\underline{45°}+6/\underline{60°}-8/\underline{-50°}+3/\underline{110°}&=(7.07+j7.07)+(3+j5.2)\\&\quad+(-5.14+j6.13)+(-1.03+j2.82)\\&=3.9+j21.2\end{aligned}$$

We convert this to polar form:

$$3.9+j21.2=21.6/\underline{79.6°}$$

Finally, from this we get the corresponding sum sine term of $21.6\sin(7t+79.6°)$.

$+ (I_2 \underline{/\phi})e^{j\omega t}$. It is possible to sum these lines, even though they are rotating, because they rotate at the same speed and so always have the same angle $\phi - \theta$ between them. In other words, we can stop these rotating lines at *any* instant of time and add them. This stopping is analogous to taking a snapshot of them. Usually, for convenience, we stop them at $t = 0$ s.

We can find the sum of these two lines by placing one line at the end of the other as shown in Fig. 11-6 for $t = 0$ s. The result is a line $I\underline{/\psi}$ in polar form, which

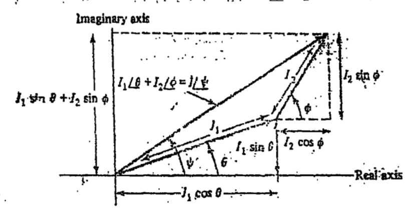


FIGURE 11-6

number has a real part that is the sum of the real parts of $I_1\underline{/\theta}$ and $I_2\underline{/\phi}$ and an imaginary part that is the sum of the imaginary parts of these numbers. Those familiar with vectors know that this is just vector addition.

So, we have $I\underline{/\psi} = I_1\underline{/\theta} + I_2\underline{/\phi}$. If we multiply both sides of this equation by $e^{j\omega t}$ and convert to exponential form, we get

$$Ie^{j(\omega t+\psi)} = I_1e^{j(\omega t+\theta)} + I_2e^{j(\omega t+\phi)}$$

Then, by Euler's identity,

$$I\cos(\omega t + \psi) + jI\sin(\omega t + \psi) = I_1\cos(\omega t + \theta) + jI_1\sin(\omega t + \theta) + I_2\cos(\omega t + \phi) + jI_2\sin(\omega t + \phi)$$

By the definition of the equality of complex numbers, the imaginary part of the number on the left of the equal sign must equal the imaginary part of the number on the right:

$$I\sin(\omega t + \psi) = I_1\sin(\omega t + \theta) + I_2\sin(\omega t + \phi)$$

What does this result mean? The significance is that we can get the peak value I and the phase angle ψ of the sum sinusoid by adding the complex numbers $I_1\underline{/\theta}$ and $I_2\underline{/\phi}$, which numbers are just from the peak values and phase angles of the individual sinusoids being added. This I and this ψ from the vector addition are really all we need to find the sum sinusoid since presumably we know ω. In other words, we can just add these complex numbers corresponding to the individual sinusoids to get the peak value and phase angle of the sum sinusoid. Although in Fig. 11-6 we performed this addition graphically for purposes of explanation, this addition is almost always easier done analytically with the complex numbers in

n angle of ωt that increases linearly with time, thereby giving rotation to the orresponding to $e^{j\omega t}$. Figure 11-4 shows this rotation in the complex plane. At t s the line is along the positive real axis. The angle increases with time, causing line to rotate *counterclockwise* as illustrated. Because by Euler's identity $= \cos \omega t + j \sin \omega t$, this line has sinusoidal projections on the two axes.

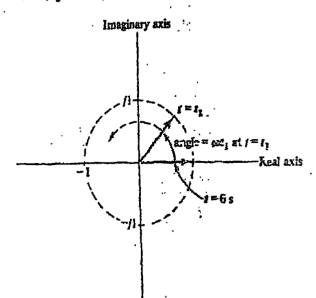


FIGURE 11-4

From this point of view, consider the sinusoid $i_1 = I_1 \sin(\omega t + \theta)$. It can be thought of as the projection of a rotating line $(I_1\underline{/\theta})e^{j\omega t}$ on the imaginary axis, as is evident from Euler's identity:

$$(I_1\underline{/\theta})e^{j\omega t} = I_1 e^{j\theta} e^{j\omega t} = I_1 e^{j(\omega t + \theta)} = I_1 \cos(\omega t + \theta) + jI_1 \sin(\omega t + \theta)$$

The imaginary part is, of course, the projection of the line on the vertical axis. This line has a length I_1 and at $t = 0$ s has an angle of θ with the positive real axis. Similarly, a current $i_2 = I_2 \sin(\omega t + \phi)$ is a projection on the vertical axis of a line of length I_2, which line has at $t = 0$ s an angle of ϕ with the positive real axis. Figure 11-5 illustrates both of these lines at $t = 0$ s. Remember that this is just for a moment of time. Actually, these lines rotate continuously in a counterclockwise direction. But they rotate at the same rate.

Now consider the rotating line that is the sum of these rotating lines: $(I_1\underline{/\theta})\, e^{j\omega t}$

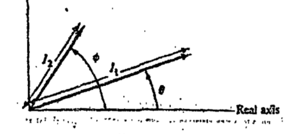


FIGURE 11-5

(b) Converting these numbers from rectangular to polar form and then multiplying is easier than multiplying these numbers in rectangular form:

$$(3+j4)(6-j10)(-2+j5) = (5\underline{/53.1^\circ})(11.7\underline{/-59^\circ})(5.39\underline{/112^\circ})$$
$$= 5 \times 11.7 \times 5.39\underline{/53.1^\circ - 59^\circ + 112^\circ} = 315\underline{/106^\circ}$$

Division in exponential and polar forms is about as easy as multiplication. To see this, consider the division of $Ae^{j\theta}$ by $Be^{j\phi}$:

$$\frac{Ae^{j\theta}}{Be^{j\phi}} = \frac{A}{B}e^{j(\theta-\phi)}$$

The quotient magnitude of A/B is the quotient of the individual magnitudes, and by the law of exponents the quotient angle of $\theta - \phi$ is the difference of the individual angles. In polar form this is

$$\frac{A\underline{/\theta}}{B\underline{/\phi}} = \frac{A}{B}\underline{/\theta - \phi}$$

Example. Find the quotients in polar form of

(a) $\dfrac{100\underline{/45^\circ}}{20\underline{/30^\circ}}$

(b) $\dfrac{(0.6-j2)(0.3+j0.4)}{(0.8-j0.7)(0.6+j0.9)}$

Solution.

(a) $$\frac{100\underline{/45^\circ}}{20\underline{/30^\circ}} = \frac{100}{20}\underline{/45^\circ - 30^\circ} = 5\underline{/15^\circ}$$

(b) We will first convert the numbers to polar form and then combine the rules for multiplying and dividing in a rather obvious manner:

$$\frac{(0.6-j2)(0.3+j0.4)}{(0.8-j0.7)(0.6+j0.9)} = \frac{(2.1\underline{/-73.3^\circ})(0.5\underline{/53.1^\circ})}{(1.06\underline{/-41.2^\circ})(1.08\underline{/56.3^\circ})}$$
$$= \frac{2.1 \times 0.5}{1.06 \times 1.08}\underline{/-73.3^\circ + 53.1^\circ - (-41.2^\circ) - 56.3^\circ}$$
$$= 0.917\underline{/-35.3^\circ}$$

PHASORS

Having mastered complex algebra, we will now use it to find the sum and difference of *sinuoids* of the *same* frequency through use of complex numbers called *phasors*. By definition a phasor is a complex number associated with a sinusoidal voltage or current in a certain way that we will study. As is customary, we will use boldface letter symbols **V** and **I** for these phasors. In fact, we will use boldface for all letter symbols corresponding to complex numbers regardless of whether these numbers are phasors.

For an understanding of phasors, consider the quantity $e^{j\omega t}$. It is a complex number, of course, as it is in exponential form with a magnitude of one. Also, it

Now we will consider mathematical operations with complex numbers in exponential and polar forms. Adding and subtracting in these forms is not practical except if the complex numbers have the same angle or, almost equivalently, have angles that differ by integer multiples of 180°. In this case the numbers are along the same line through the origin in the complex plane, with the result that adding and subtracting is similar to that with real numbers, with the adding and subtracting being performed basically on only the magnitudes, as the following example illustrates.

Example. Calculate $3\underline{/45^\circ} + 8\underline{/225^\circ} - 10\underline{/45^\circ} + 20\underline{/-135^\circ}$.

Solution. All these complex numbers are along a line through the origin, which line is at an angle of 45° in the first quadrant. Because they are along the same line, they can be added in polar form. For this addition it helps to have the same angle for each number. For some numbers this requires adding or subtracting 180° and at the same time inserting a negative sign so as not to change the number. Here it is convenient to select the angle 45° because two of the four numbers have this angle. Converting the other numbers to this angle, we have

$$8\underline{/225^\circ} = -8\underline{/225^\circ - 180^\circ} = -8\underline{/45^\circ}$$

and

$$20\underline{/-135^\circ} = -20\underline{/-135^\circ + 180^\circ} = -20\underline{/45^\circ}$$

Therefore,

$$3\underline{/45^\circ} + 8\underline{/225^\circ} - 10\underline{/45^\circ} + 20\underline{/-135^\circ} = 3\underline{/45^\circ} - 8\underline{/45^\circ} - 10\underline{/45^\circ} - 20\underline{/45^\circ}$$
$$= (3 - 8 - 10 - 20)\underline{/45^\circ} = -35\underline{/45^\circ}$$

Because complex numbers that are to be added are seldom all along a line through the origin, we must usually use the rectangular form to add or subtract and so convert to rectangular form any numbers that are in polar or exponential form. As mentioned, though, the polar and exponential forms are usually best for multiplication and division.

We will now consider the multiplication of two complex numbers $Ae^{j\theta}$ and $Be^{j\phi}$ in exponential form. By the law of exponents,

$$Ae^{j\theta} \times Be^{j\phi} = ABe^{j(\theta+\phi)}$$

which product has a magnitude AB that is the product of the individual magnitudes and an angle $\theta + \phi$ that is the sum of the individual angles. In polar form this is

$$A\underline{/\theta} \times B\underline{/\phi} = AB\underline{/\theta + \phi}$$

Example. Find the products of

(a) $(4\underline{/30^\circ})(-5\underline{/20^\circ})(6\underline{/-45^\circ})$
(b) $(3 + j4)(6 - j10)(-2 + j5)$

Solution.

(a) Multiplying the magnitudes and adding the angles, we get

$$(4)(-5)(6)\underline{/30^\circ + 20^\circ - 45^\circ} = -120\underline{/5^\circ}$$

elementary trigonometry, $x = A\cos\theta$, $y = A\sin\theta$, and $A = \sqrt{x^2 + y^2}$, all in agreement with the results from Euler's identity. This line point of view is often helpful in finding the correct angles in the conversion from rectangular to polar form for complex numbers in the second and third quadrants.

Example. Convert the following complex numbers to polar form:

(a) $3 + j4$
(b) $3 - j4$
(c) $-3 + j4$
(d) $-3 - j4$

Solution. Because all four numbers have 3 and 4 for the two rectangular parts, these numbers have the same magnitude of $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Only the angles differ, as is evident from Fig. 11-3, which shows that each number is in a different quadrant.

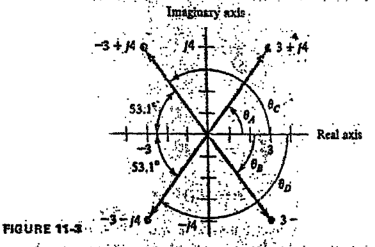


FIGURE 11-3

Finding angles in the first and fourth quadrants is easy. Clearly, $\theta_A = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.1°$ and $\theta_B = \tan^{-1}\frac{-4}{3} = -53.1°$. And so $3 + j4 = 5\angle 53.1°$ and $3 - j4 = 5\angle -53.1°$. But finding angles in the second and third quadrants can be more difficult because some calculators give angles in the first and fourth quadrants for the arctangent even when the angles should be in the second and third quadrants. Consequently, for converting complex numbers from rectangular to polar forms, drawing the lines is sometimes essential and usually advisable, especially if the numbers are in the second or third quadrants.

The calculators that produce incorrect angles for second and third quadrant numbers, do, however, give the angles from the negative real axis to the lines. Therefore, the lines for $-3 - j4$ and $-3 + j4$ are, as illustrated, 53.1° from the negative real axis. Because this axis corresponds to either +180° or −180°, whichever is more convenient, $\theta_C = 180° - 53.1° = 126.9°$ and $\theta_D = -180° - (-53.1°) = -126.9°$. The final results are $-3 + j4 = 5\angle 126.9°$ and $-3 - j4 = 5\angle -126.9°$.

A final word on converting from rectangular to polar for numbers in the first and fourth quadrants: If the imaginary part has a *greater* magnitude than the real part, the absolute value of the phase angle is *greater* than 45°. Otherwise, it is equal to or less than 45°. Always make this quick check.

t $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

$$A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = A^2(1) = x^2 + y^2$$

By taking the square root of both sides we get the formula

$$\boxed{A = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Some pocket calculators have a built-in feature for converting from rectangular to polar forms and from polar to rectangular forms.

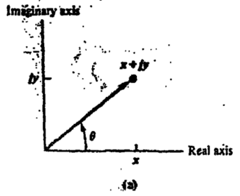
Example. Convert the following complex numbers to polar form:

(a) $3 + j4$
(b) $15 - j6$
(c) $15 + j1$
(d) $2 - j25$

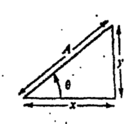
Solution.

(a) $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.13°$, $A = 3/\cos 53.13° = 5$, so $3 + j4 = 5\underline{/53.13°}$.
(b) $\theta = \tan^{-1} -\frac{6}{15} = -21.8°$, $A = 15/\cos(-21.8°) = 16.16$, so $15 - j6 = 16.16\underline{/-21.8°}$.
(c) When one part of a complex number in rectangular form is more than 10 times the other, often a reasonable approximation is to neglect the smaller part. Doing this here we get $15 + j1 \simeq 15$. If we need more accuracy, we do as before: $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{15} = 3.81°$, $A = 15/\cos 3.81° = 15.03$, so $15 + j1 = 15.03\underline{/3.81°}$.
(d) $2 - j25 \simeq -j25 = 25\underline{/-90°}$ or, more accurately, $\theta = \tan^{-1} -\frac{25}{2} = -85.4°$, $A = 25/\cos(-85.4°) = 25.1$, so $2 - j25 = 25.1\underline{/-85.4°}$.

The exponential and polar forms may be easier to understand by considering a complex number to be more than just a point in the complex plane, and instead to be a line extending from the origin to this point. Figure 11-2(a) illustrates this line for the general point $x + jy$. Usually, the line has, as shown, an arrowhead at the point even though the arrowhead has *no* significance. As shown in Fig. 11-2(b), the line forms a right triangle with its horizontal and vertical projections. This right triangle has a horizontal side x, a vertical side y, and a hypotenuse A. From



(a)



(b)

FIGURE 11-2

(c) $10\angle{-45^\circ} = 10\cos(-45^\circ) + j10\sin(-45^\circ) = 7.07 - j7.07$
(d) $120\angle{-180^\circ} = 120\cos(-180^\circ) + j120\sin(-180^\circ) = -120$
(e) $120\angle{180^\circ} = 120\cos 180^\circ + j120\sin 180^\circ = -120$
(f) $80\angle{-90^\circ} = 80\cos(-90^\circ) + j80\sin(-90^\circ) = -j80$
(g) $80\angle{90^\circ} = 80\cos 90^\circ + j80\sin 90^\circ = j80$

Particularly notice that the results of parts (d) and (e) show that a negative sign corresponds to an angle of either 180° or −180°. Put another way, $-1 = 1\angle{180^\circ} = 1\angle{-180^\circ}$. Parts (f) and (g) indicate that an angle of −90° corresponds to multiplication by $-j1$ and that an angle of +90° corresponds to multiplication by $+j1$: $1\angle{-90^\circ} = -j1$ and $1\angle{90^\circ} = j1$.

We now know how to use Euler's identity to convert from the exponential and polar forms to the rectangular form, but how about going the other way? How do we convert a complex number in rectangular form to exponential or polar form? We will now derive the conversion formulas by considering the general complex number $x + jy$ in rectangular form. This is to be converted to the equivalent $Ae^{j\theta}$ in exponential form such that $x + jy = Ae^{j\theta}$. Presumably, x and y are known, and the problem is to find θ and A in terms of x and y. Using Euler's identity we can place the right side $Ae^{j\theta}$ in rectangular form:

$$x + jy = A\cos\theta + jA\sin\theta$$

Two complex numbers in rectangular form being equal means that the real parts are equal and that the imaginary parts are equal. Consequently, $x = A\cos\theta$ and $y = A\sin\theta$. By taking the ratio of these two equations, we can eliminate A:

$$\frac{\cancel{A}\sin\theta}{\cancel{A}\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

But,

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

So,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{and} \quad \boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

which specifies that the angle of a complex number equals the arctangent of the quotient of the imaginary part divided by the real part.

With the angle known, we can easily find A from either $A\cos\theta = x$ or from $A\sin\theta = y$:

$$\boxed{A = \frac{x}{\cos\theta} \quad \text{or} \quad A = \frac{y}{\sin\theta}}$$

Another popular way to find A is to use a formula based on squaring both sides of $A\cos\theta = x$ and of $A\sin\theta = y$, and adding corresponding sides:

$$A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = x^2 + y^2$$

except possibly for just two complex numbers, multiplication and division are usually best done with another form of complex number, as we shall now see. But the rectangular form is by far the best for general addition and subtraction.

EXPONENTIAL AND POLAR FORMS

We now consider the *exponential form* of complex numbers, and its shorthand version, the *polar form*. These forms are best for multiplication and division. But, except for one rare case, they are not useful for addition or subtraction.

The general exponential form is $Ae^{j\theta}$, in which A is the *magnitude*, θ the *angle*, and $e = 2.718\ldots$, the base of the natural logarithm. Some examples of the exponential form are $4e^{j30^\circ}$, $-6e^{j60^\circ}$, and $8e^{j120^\circ}$. In the strictest sense, the negative sign in the second example is not a part of the magnitude. Rather, it corresponds to an angle of 180°, as will be explained. As a practical matter, however, we will sometimes find it convenient to include a negative sign in the number corresponding to A. Also, mathematically speaking, θ should be in radians. But, except for some mathematicians, almost everyone prefers to use degrees because of greater familiarity with them.

The polar shorthand for $Ae^{j\theta}$ is $A/\underline{\theta}$. It does not, for convenience, have the e or the j. Some specific examples are $4e^{j30^\circ} = 4/\underline{30^\circ}$, $-6e^{j60^\circ} = -6/\underline{60^\circ}$, and $8e^{j120^\circ} = 8/\underline{120^\circ}$. Both forms are equivalent, with the polar form being far more popular simply because it is easier to write.

That a number such as $4e^{j30^\circ}$ is a complex number becomes evident from *Euler's identity*: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$. From Euler's identity, for example,

$$4e^{j30^\circ} = 4/\underline{30^\circ} = 4(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ) = 3.46 + j2$$

and

$$-6e^{j60^\circ} = -6/\underline{60^\circ} = -6(\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ) = -3 - j5.2$$

These two examples also illustrate that Euler's identity is useful for converting a complex number from either the exponential or polar form to the rectangular form. We will not prove Euler's identity because of the advanced mathematics required.

Example. Convert the following complex numbers to rectangular form:

(a) $3/\underline{-20^\circ}$
(b) $-6/\underline{-120^\circ}$
(c) $10/\underline{-45^\circ}$
(d) $120/\underline{-180^\circ}$
(e) $120/\underline{180^\circ}$
(f) $80/\underline{-90^\circ}$
(g) $80/\underline{90^\circ}$

Solution. From Euler's identity,

(a) $3/\underline{-20^\circ} = 3\cos(-20^\circ) + j3\sin(-20^\circ) = 2.82 - j1.03$
(b) $-6/\underline{-120^\circ} = -6\cos(-120^\circ) + j(-6)\sin(-120^\circ) = 3 + j5.2$

equal to the sum of the squares $(1)^2 + (2)^2$ of its real and imaginary parts, as always happens when multiplying by a conjugate.

When the dividend or divisor is a product of complex numbers, the procedure is to take the product of the numerator complex numbers to reduce the numerator to a single complex number and then do the same thing for the denominator. Then the division is the same as for the quotient of two complex numbers.

Example. Find $(3 + j4)(-1 + j2)/(3 - j2)(-4 - j5)$.

Solution. First we multiply:

$$\frac{(3 + j4)(-1 + j2)}{(3 - j2)(-4 - j5)} = \frac{-3 + j6 - j4 - 8}{-12 - j15 + j8 - 10} = \frac{-11 + j2}{-22 - j7}$$

and then divide in the usual way:

$$\frac{(-11 + j2)(-22 + j7)}{(-22 - j7)(-22 + j7)} = \frac{242 - j77 - j44 - 14}{(-22)^2 + 7^2} = \frac{228 - j121}{533}$$

$$= 0.428 - j0.227$$

In the following chapters we will sometimes add ratios of complex numbers in rectangular form, as in

$$\frac{3 + j4}{6 - j2} + \frac{1 - j4}{-2 + j3}$$

and will want the result in the same form. To do this we give each ratio a *common denominator* of the product of the individual denominators: $(6 - j2)(-2 + j3)$, here. Of course, in doing this, we multiply each numerator by the same quantity that we multiply the corresponding denominator by. Once the ratios have the same denominators, we can add the numerators and place the sum over the common denominator.

So here, to get a common denominator, we multiply the numerator and denominator of the first ratio by $-2 + j3$ and those of the second ratio by $6 - j2$:

$$\frac{(3 + j4)(-2 + j3)}{(6 - j2)(-2 + j3)} + \frac{(1 - j4)(6 - j2)}{(-2 + j3)(6 - j2)}$$

Multiplying:

$$\frac{-6 + j9 - j8 - 12}{-12 + j18 + j4 + 6} + \frac{6 - j2 - j24 - 8}{-12 + j4 + j18 + 6}$$

Simplifying:

$$\frac{-18 + j1}{-6 + j22} + \frac{-2 - j26}{-6 + j22}$$

Finally, adding numerators over the common denominator of $-6 + j22$:

$$\frac{-18 + j1 - 2 - j26}{-6 + j22} = \frac{-20 - j25}{-6 + j22}$$

(c) $4 + j8 + 5 - j2.4 - 0.6 - j0.8 = 4 + 5 - 0.6 + j8 - j2.4 - j0.8 = 8.4 + j4.8$. This part illustrates that parentheses are unnecessary in adding.

(d) $(4.2 - j3.8) - (-3.1 + j2.1) = 4.2 - (-3.1) - j(3.8 + 2.1) = 7.3 - j5.9$

To multiply two complex numbers in rectangular form, we multiply the real part of one number times the entire second number, and then the imaginary part times the second number. Last, we add these two results.

Example. Find the product of $3 + j2$ and $-6 + j1$.

Solution. We take the real part, 3, of the first number times the second number and the imaginary part, $j2$, times the second number, and add:

$$(3 + j2)(-6 + j1) = 3(-6 + j1) + j2(-6 + j1) = -18 + j3 - j12 - 2$$
$$= -20 - j9$$

The rectangular form is awkward for multiplying more than two complex numbers, but is sometimes used when the product is wanted in rectangular form. This multiplication is usually easiest if performed on only two numbers at a time.

Example. Find $(6 - j10)(2 + j1)(-4 + j5)$ in rectangular form.

Solution. We will multiply in pairs. The product of the first pair is

$$(6 - j10)(2 + j1) = 12 + j6 - j20 + 10 = 22 - j14$$

And this times the third number is the desired product.

$$(22 - j14)(-4 + j5) = -88 + j110 + j56 + 70 = -18 + j166$$

As to be expected, the division of complex numbers in rectangular form is somewhat more difficult than multiplication. For division we first place the dividend and divisor in the usual ratio form with the dividend in the numerator and the divisor in the denominator. Then we multiply numerator and denominator by the *conjugate* of the denominator complex number. The conjugate of a complex number has the same real part but the negative of the imaginary part. As we will see, multiplying a complex number by its conjugate produces a real number equal to the sum of the squares of the real and imaginary parts. As a result of this multiplication, the denominator becomes real, making the division straightforward. This step of making the denominator real is the same rationalizing mentioned in the discussion of the division of imaginary numbers.

Example. Calculate $(3 + j4)/(1 - j2)$.

Solution. The denominator $1 - j2$ has a conjugate of $1 + j2$. Multiplying the numerator and denominator by this, we get

$$\frac{(3 + j4)(1 + j2)}{(1 - j2)(1 + j2)} = \frac{3 + j6 + j4 - 8}{1 + j2 - j2 + 4} = \frac{-5 + j10}{1 + 4} = -1 + j2$$

Notice that multiplying the denominator by its conjugate produced a real number

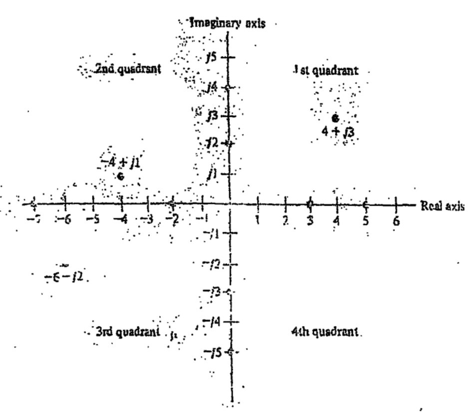


FIGURE 11-1

the imaginary or j axis. Figure 11-1 shows four of these points: $-j5$, $-j3$, $j2$, and $j4$.

Other complex numbers have nonzero real and imaginary parts. Consequently, they correspond to points off the axes. The real part of each number gives the position to the right or to the left of the vertical axis and the imaginary part gives the position above or below the horizontal axis. Figure 11-1 shows four of these points, one in each quadrant.

The rectangular form is the only practical form for general addition and subtraction. As to be expected, addition and subtraction are applied separately to the real and imaginary parts.

Example. Find the following:

(a) $(3 + j4) + (-6 + j8)$
(b) $(-6 + j10) + (4 - j7) + (2 - j4)$
(c) $4 + j8 + 5 - j2.4 - 0.6 - j0.8$
(d) $(4.2 - j3.8) - (-3.1 + j2.1)$

Solution. As mentioned, the procedure is to separately add or subtract the real parts and imaginary parts. As a result,

(a) $(3 + j4) + (-6 + j8) = 3 - 6 + j(4 + 8) = -3 + j12$
(b) $(-6 + j10) + (4 - j7) + (2 - j4) = -6 + 4 + 2 + j(10 - 7 - 4)$

Complex Algebra and Phasors

INTRODUCTION

How do we analyze sinusoidally excited *RLC* circuits? We could, of course, apply KVL and KCL. But they require differential equations and also summing of sinusoids of different phase angles. We can avoid both of these disadvantages by using *complex algebra* and *phasors*. As we will study, complex algebra is just a slight extension of the algebra of real numbers, the algebra we know so well. The extension is to complex numbers with their own special rules for operations. A knowledge of complex algebra is essential because we will be *transforming* sinusoids into complex numbers called phasors, and will be using complex algebra on these phasors.

COMPLEX NUMBERS AND THE RECTANGULAR FORM

A *complex number* has a real part and an imaginary part. In one form, the *rectangular form*, it is written as the sum of the real part and imaginary part. By convention the real part is written first. For example, $3 + j4$, $-7 - j2$, $-0.5 + j100$, and $-2 + j0.6$ are complex numbers in rectangular form.

A more general way of considering a complex number is as a point in the *complex plane*. As illustrated in Fig. 11-1, the complex plane has two perpendicular axes, one horizontal and one vertical. The horizontal axis is the real axis and the vertical axis is the imaginary axis (or j axis), as labeled. Both axes *must* have the same scale.

The axes divide the complex plane into four quadrants, as labeled. Real parts of complex numbers are positive to the right of the vertical axis in the first and fourth quadrants. They are negative to the left of the vertical axis in the second and third quadrants. Imaginary parts are positive above the horizontal axis in the first and second quadrants, and negative below the horizontal axis in the third and fourth quadrants.

Complex numbers with zero imaginary parts are purely real and so are points on the real axis. Figure 11-1 has four of these points: -7, -2, 3, and 5. Complex numbers with zero real parts, instead, are purely imaginary, and so are points on

Problems CH. 10

10-44 Find the reactances of a 100-pF capacitor at the following frequencies.

(a) 2 kHz
(b) 2.5 MHz
(c) 120 MHz
(d) 1000 MHz

10-45 Find the capacitances that produce the following capacitive reactances.

(a) $-6\ \Omega$ at 1 kHz
(b) $-0.1\ \Omega$ at 20 kHz
(c) $-1\ \mathrm{k}\Omega$ at 60 kHz
(d) $-1\ \mathrm{M}\Omega$ at 5 kHz

10-46 Repeat Prob. 10-45 for

(a) $-10\ \mathrm{k}\Omega$ at 6 kHz
(b) $-120\ \Omega$ at 500 kHz
(c) $-10\ \Omega$ at 1 MHz
(d) $-20\ \mathrm{k}\Omega$ at 60 kHz

10-47 For a 2-μF capacitor find the capacitor currents corresponding to the following voltages. Assume associated references.

(a) $8 \sin 20t$ V
(b) $10 \cos (1000t - 45°)$ V
(c) $500 \cos (10^6 t + 55°)$ V
(d) $1250 \sin (377t - 25°)$ V

10-48 Repeat Prob. 10-47 for a 0.1-μF capacitor and the following voltages.

(a) $22 \sin 200\pi t$ V
(b) $16 \cos (2000t - 65°)$ V
(c) $0.6 \cos (10^7 t + 45°)$ V
(d) $-4200 \cos (377t - 75°)$ V

10-49 For a 0.01-μF capacitor find the capacitor voltages corresponding to the following currents. Assume associated references.

(a) $0.2 \sin 377t$ A
(b) $4.3 \cos (9000t - 45°)$ A
(c) $-0.04 \sin (10^6 t - 35°)$ A
(d) $20 \sin (1000t + 30°)$ A

10-50 Repeat Prob. 10-49 for a 10-μF capacitor and the following currents.

(a) $0.06 \sin 377t$ A
(b) $6.8 \cos 1500t$ A
(c) $-0.002 \sin (377t - 45°)$ A
(d) $10.6 \cos (10^6 t + 30°)$ A

10-27 For each pair of the following resistor voltages and currents, find the corresponding resistance and the average power dissipated.

(a) $v = 20 \cos(377t + 10°)$ V and $i = 5 \cos(377t + 10°)$ A
(b) $v = 3.6 \sin(754t - 15°)$ V and $i = 72 \sin(754t - 15°)$ A

10-28 Repeat Prob. 10-27 for

(a) $v = 2000 \sin(60t - 10°)$ V and $i = 20 \sin(60t - 10°)$ A
(b) $v = -3.4 \cos 20t$ mV and $i = -13.6 \cos 20t$ μA

10-29 Find the effective values of the following voltages and currents.

(a) $30 \sin 377t$ V
(b) $0.04 \cos(377t + 40°)$ V
(c) $-10 \sin(70t + 15°)$ A
(d) $1250 \cos(754t - 20°)$ A

10-30 Repeat Prob. 10-29 for

(a) $\sin 754t$ V
(b) $2.1 \sin(377t - 45°)$ V
(c) $-48 \cos(30t + 76°)$ A
(d) $74 \cos(80t - 185°)$ A

10-31 Write the sine-term expressions corresponding to the following rms voltages and currents, assuming a frequency of 60 Hz and a 0° phase angle.

(a) 230 V
(b) 10 A
(c) 14.14 V
(d) 62 μA

10-33 Find the effective value of a periodic voltage that is 10 V for half a period and −5 V for the second half-period. Then, repeat the calculation for the same first half-period value but for a second half-period value of 5 V instead of −5 V.

10-34 Find the effective value of a periodic current that is 20 A for one-third period, 0 A for the middle third period, and −4 A for the final third of the period.

10-39 For a 20-mH inductor find the inductor voltages corresponding to the following currents. Assume associated references.

(a) $6 \sin 10t$ A
(b) $7 \sin(50t - 10°)$ A
(c) $0.8 \cos(100t + 45°)$ A
(d) $-50 \sin(60t - 80°)$ A

10-40 Repeat Prob. 10-39 for a 0.4-H inductor and the following currents.

(a) $5 \sin 20t$ A
(b) $8 \sin(40t - 35°)$ A
(c) $0.6 \sin(100t + 15°)$ A
(d) $-40 \cos(1000t - 50°)$ A

10-41 For a 50-mH inductor find the inductor currents corresponding to the following voltages. Assume associated references.

(a) $100 \sin 20t$ V
(b) $50 \cos 40t$ V
(c) $0.5 \sin(100t - 25°)$ V
(d) $-20 \cos(200t - 35°)$ V

10-18 Repeat Prob. 10-17 for

(a) $v = 10 \sin 377t$ V, $i = 6 \sin (377t - 135°)$ A
(b) $v = 1.1 \cos (6\pi t - 135°)$ V, $i = 2.2 \sin (6\pi t + 135°)$ A
(c) $v = -64 \cos (70t + 15°)$ V, $i = -22 \sin (70t - 33°)$ A
(d) $v_1 = 2.6 \sin (37t - 22°)$ V, $v_2 = -3.4 \cos (37t - 45°)$ V
(e) $v = 1.2 \sin (36t - 15°)$ V, $i = 1.3 \sin (11t - 22°)$ A

10-19 A certain sinusoidal voltage has a positive peak of 24 V, a frequency of 60 Hz, and a zero value at $t = -0.11$ s. What are the sinusoids that satisfy this description?

10-20 Repeat Prob. 10-19 for a sinusoidal current having a positive peak of 5 A, a frequency of 120 Hz, and a zero value at $t = 0.01$ s.

10-21 Find the average values of

(a) $6 - 8 \cos (377t + 10°)$ A
(b) A sawtooth wave with a peak of 10.
(c) 3 V
(d) $4 \cos^2 377t$ V [*Hint:* Use a trigonometric identity.]
(e) A periodic voltage that is 10 V for three-fourths of a period and is −2 V for the remaining one-fourth of a period.

10-22 Repeat Prob. 10-21 for

(a) $v = -6 \sin (754t - 20°)$ V
(b) $i = 22 \cos (10t + 35°)$ A
(c) $v = -10 - 4 \cos (20t - 15°)$ V
(d) A sawtooth wave with a peak of 48.
(e) A periodic current that is −20 A for half a period and −5 A for the remaining half-period.

10-23 For a 2-Ω resistor find the resistor currents corresponding to the following resistor voltages. Assume associated references. Also find the average powers dissipated.

(a) $3 \cos 377t$ V
(b) $4 \sin (20t - 10°)$ V
(c) $-6 \cos (754t - 15°)$ μV
(d) $20 \sin (100t + 45°)$ mV

10-24 Repeat Prob. 10-23 for a 3-kΩ resistor and the following voltages.

(a) $4000 \cos 377t$ V
(b) $200 \sin 754t$ V
(c) $-30 \cos (20t - 45°)$ μV
(d) $-45 \sin (377t - 135°)$ mV

10-25 For a 2-kΩ resistor find the resistor voltages corresponding to the following resistor currents. Assume associated references. Also find the average powers dissipated.

(a) $4 \cos 377t$ A
(b) $2 \sin (754t - 30°)$ mA
(c) $3 \cos (10^6 t - 20°)$ μA
(d) $-4 \sin (1000t - 15°)$ A

10-2 Repeat Prob. 10-1 for

(a) $9 \sin (10t - 36^\circ)$
(b) $24 - 12 \cos (2t + 85^\circ)$
(c) $10 \sin^2 11t$
(d) $10 \sin 6t \cos 6t$

10-3 Find the period of a periodic function having a frequency of

(a) 0.1 Hz
(b) 60 Hz
(c) 15 kHz
(d) 10 MHz

10-4 Find the frequency of a periodic function having a period of

(a) 1 μs
(b) $\frac{1}{60}$ s
(c) 20 s
(d) 1 day

10-5 Find the period and frequency of a sinusoid having a radian frequency of

(a) 6π rad/s
(b) 377 rad/s
(c) 0.01 rad/s
(d) 10^6 rad/s

10-6 Repeat Prob. 10-5 for

(a) 30 rad/s
(b) 0.25 rad/s
(c) 100π rad/s
(d) 2×10^5 rad/s

10-7 Find the radian frequency of a sinusoid having a frequency of

(a) 120 Hz
(b) 0.1 Hz
(c) 35 kHz
(d) 1 MHz

10-13 Sketch one cycle of $10 \sin 6\pi t$ with the abscissa in

(a) time
(b) radians
(c) degrees

10-14 Repeat Prob. 10-13 for $8 \cos 20t$.

10-15 Repeat Prob. 10-13 for $10 \sin (6\pi t + 30^\circ)$.

10-16 Repeat Prob. 10-13 for $8 \cos (20t - 45^\circ)$.

10-17 Find the phase relations for the following pairs of sinusoids.

(a) $v = 8 \sin (20t + 30^\circ)$ V, $i = 6 \sin (20t - 25^\circ)$ A
(b) $v = 8 \sin (20\pi t + 30^\circ)$ V, $i = 6 \cos (20\pi t - 35^\circ)$ A
(c) $v_1 = -11 \sin (377t - 45^\circ)$ V, $v_2 = 23 \cos (377t + 37^\circ)$ V
(d) $i_1 = -3.6 \sin (754t - 15^\circ)$ A, $i_2 = -7.8 \cos (754t - 35^\circ)$ A
(e) $v = -7.6 \sin (22t - 13^\circ)$ V, $i = 4.3 \cos (11t + 22^\circ)$ A

which simplifies to

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \sin(2\omega t + 2\theta) = V_{eff} I_{eff} \sin(2\omega t + 2\theta)$$

So, the instantaneous power absorbed by a capacitor is sinusoidal of twice the frequency of either voltage or current. Because the instantaneous power is sinusoidal, its average is zero: $P_{av} = 0$ W. To repeat, *a sinusoidally excited capacitor absorbs zero average power.*

This instantaneous power has a peak or maximum value P_m of $V_m I_m/2$, substitution of $V_m = I_m/\omega C$ into which produces

$$P_m = \frac{I_m^2}{2\omega C} = \frac{I_{eff}^2}{\omega C} = -\frac{I_{eff}^2}{-\omega C} = -I_{eff}^2 X_C$$

The quantity $I_{eff}^2 X_C$ is the reactive power absorbed by a capacitor. Notice that this is the same formula as for an inductor except for X_C instead of X_L. Also, this reactive power is negative for a capacitor because X_C, the reactance, is negative. Capacitive reactive power has the same symbol Q as inductive reactive power: $Q = I_{eff}^2 X_C$. Also, $Q = V_{eff}^2/X_C$ is the same.

Now consider the energy absorbed by a capacitor. Since a sinusoidally excited capacitor absorbs zero average power, it does not dissipate energy. It does, however, alternately absorb and deliver energy. The instantaneous energy absorbed is

$$w = \tfrac{1}{2}Cv^2 = \tfrac{1}{2}CV_m^2 \sin^2(\omega t + \theta) = \tfrac{1}{4}CV_m^2[1 - \cos(2\omega t + 2\theta)]$$

Because the cosine term cannot be greater than 1, the quantity in brackets is never negative. Also, the peak energy stored is $CV_m^2/2$, which occurs each time the cosine term is -1. These are the times at which the voltage is at its peaks, either positive or negative. The capacitor returns all this energy to the circuit each time the capacitor voltage is zero. As the capacitor voltage increases in magnitude, the capacitor absorbs increasing amounts of energy. And as the capacitor voltage decreases in magnitude, the capacitor returns energy to the circuit and in so doing acts like a source.

With this completion of our capacitor discussion, we now know how resistors, inductors, and capacitors *individually* respond to sinusoidal excitation. The next logical step is the analysis of sinusoidally excited circuits of mixed components. But before doing this we must study complex algebra and phasors, the subject of Chap. 11.

PROBLEMS

10-1 Find the frequency and period of each of the following periodic functions. [*Hint:* For parts (c) and (d) use trigonometric identities.]

(a) $4\cos(15t + 35°)$
(b) $6 + 8\sin(377t - 20°)$
(c) $4\cos^2 7t$
(d) $6\sin 2t \cos 2t$

·ote that $1/\omega C$ is *inversely* proportional to frequency and capacitance. Con- ently, the greater the capacitance or the greater the frequency, the less the :ance, and so the greater the current for the same voltage. At the extreme of :uency as the frequency approaches zero and becomes more and more like dc, ωC approaches infinity. This means that a capacitor acts more and more like an open circuit, in agreement with our dc results. On the other extreme, as the frequency gets very large, $1/\omega C$ approaches zero, which means that the capacitor approaches a short circuit.

From a comparison of $i = \omega CV_m \cos(\omega t + \theta)$ and $v = V_m \sin(\omega t + \theta)$, ·arly the capacitor current *leads* the capacitor voltage by 90°. Or, the capacitor ltage *lags* the capacitor current by 90°. This lead and lag are important to remember.

Example. A 0.01-μF capacitor has a voltage $v = 100 \sin(\omega t + 30°)$ V. Find the apacitor current for (a) $\omega = 1000$ rad/s and for (b) $\omega = 10^7$ rad/s.

Solution. (a) For $\omega = 1000$ rad/s, $\omega C = 1000 \times 10^{-8} = 10^{-5}$. This times the volt- age peak produces a current peak of

$$I_m = 10^{-5} \times 100 = 10^{-3} = 1 \text{ mA}$$

Then from the fact that capacitor current leads capacitor voltage by 90°, we get $i = \sin(1000t + 30° + 90°) = \cos(1000t + 30°)$ mA. (b) For $\omega = 10^7$ rad/s, $\omega C = 10^7 \times 10^{-8} = 0.1$, producing a current peak of $I_m = 0.1 \times 100 = 10$ A. Consequently, $i = 10 \sin(10^7 t + 30° + 90°) = 10 \cos(10^7 t + 30°)$ A. Significantly, the current peak increased from 1 mA to 10 A with the increase of frequency from $\omega = 1000$ to 10^7 rad/s.

Example. A 1-μF capacitor carries a current of $i = 2 \cos(1000t + 30°)$ A. What is the capacitor voltage?

Solution. For $C = 1\ \mu$F and $\omega = 1000$ rad/s,

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \times 10^{-6}} = 1000\ \Omega$$

So, the peak capacitor voltage is

$$V_m = \frac{1}{\omega C} \times I_m = 1000 \times 2 = 2000 \text{ V}$$

From this peak voltage and the fact that capacitor voltage lags capacitor current by 90°, we get a capacitor voltage of

$$v = 2000 \cos(1000t + 30° - 90°) = 2000 \cos(1000t - 60°) \text{ V}$$

Now consider the power absorbed by a capacitor with a voltage $v = V_m \sin(\omega t + \theta)$ and a current $i = I_m \cos(\omega t + \theta)$. The *instantaneous* power ab- sorbed is

$$p = vi = [V_m \sin(\omega t + \theta)][I_m \cos(\omega t + \theta)] = V_m I_m \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \theta)$$

CAPACITOR SINUSOIDAL RESPONSE

If in the last section we interchange v and i and if we substitute C for L, the same material describes capacitor sinusoidal response. This follows from a comparison of the basic equations, $v = L\,di/dt$ and $i = C\,dv/dt$. For this reason, the following section on capacitor sinusoidal response strongly resembles the inductor material of the last section.

Consider the circuit of Fig. 10-21 in which a voltage source produces a sinusoidal voltage across a capacitor. What is the current? This current is easy to find from the basic capacitor equation:

$$i = C\frac{dv}{dt} = C\frac{d}{dt}[V_m \sin(\omega t + \theta)] = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta)$$

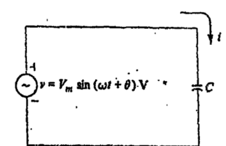


FIGURE 10-21

This capacitor current is sinusoidal and of the same frequency as the voltage. Further, viewing the capacitor current as the excitation and the capacitor voltage as the response, we find that a sinusoidal capacitor current produces a sinusoidal capacitor voltage of the same frequency. The sinusoid is about the only practical excitation for which capacitor voltage and current have the same waveshape.

The multiplier $\omega C V_m$ is, of course, the peak current:

$$I_m = \omega C V_m = \frac{V_m}{1/\omega C}$$

Comparing this with the resistor relation of $I = V_m/R$, we see that a capacitor has a current limiting action similar to that of a resistor with $1/\omega C$ corresponding to R. Because of this action, some electric circuits books have *capacitive reactance* defined as $1/\omega C$. But most electrical engineering circuits books include a negative sign and so have capacitive reactance defined as

$$\boxed{X_C = -\frac{1}{\omega C}}$$

for reasons having to do with phase shift, as we will study later. Although this is the definition we will adopt, we need not be concerned now about the negative sign. Of course, in this definition, X_C is the quantity symbol for capacitive reactance, and this reactance has the unit of ohm.

Now consider the power absorbed by an inductor having a voltage of $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ and a current of $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$. The *instantaneous* power p is the product of instantaneous voltage and current:

$$p = vi = [V_m \cos(\omega t + \theta)][I_m \sin(\omega t + \theta)] = V_m I_m \cos(\omega t + \theta)\sin(\omega t + \theta)$$

From the trigonometric identity $\cos x \sin x = (\sin 2x)/2$ and for $x = \omega t + \theta$, this result simplifies to

$$p = \frac{V_m I_m}{2}\sin(2\omega t + 2\theta) = V_{eff} I_{eff} \sin(2\omega t + 2\theta)$$

This instantaneous power absorbed by an inductor is sinusoidal at twice the frequency of either voltage or current. Being sinusoidal, its average is zero—$P_{av} = 0$ W—because a sinusoid has a zero average over a period. To repeat for emphasis, *a sinusoidally excited inductor absorbs zero average power.*

This instantaneous power has a peak or maximum value P_m of $V_m I_m/2$ that with the substitution of $V_m = \omega L I_m$ becomes

$$P_m = \frac{\omega L I_m^2}{2} = I_{eff}^2 \omega L = I_{eff}^2 X_L$$

The quantity $I_{eff}^2 X_L$ is called *reactive power* because of its similarity to $I^2 R$. We can get another expression for reactive power, which has the symbol Q, from the substitution $I_{eff} = V_{eff}/X_L$. The result is $Q = V_{eff}^2/X_L$. Although an inductor does not dissipate this reactive power, which is actually the peak power absorbed, an inductor requires current for this power, and it is this current that causes problems, as we will study in Chap. 15.

Now consider the energy absorbed by an inductor. Because a sinusoidally excited inductor absorbs zero average power, it does not dissipate energy. It does, however, alternately absorb and deliver energy as is evident from the instantaneous energy formula:

$$w = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}LI_m^2 \sin^2(\omega t + \theta) = \tfrac{1}{4}LI_m^2[1 - \cos(2\omega t + 2\theta)]$$

The last step is from the trigonometric identity $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ with $x = \omega t + \theta$. Because the cosine term cannot be greater than 1, the quantity in brackets is never negative, and so the energy absorbed is never negative. Also, each time that $\cos(2\omega t + 2\theta) = -1$, the energy stored has a peak of $LI_m^2/2$. This occurs twice each period of the current, once for $i = I_m$ and the other for $i = -I_m$. Similarly, an inductor has zero energy twice each cycle. This occurs each time $i = 0$.

As should be apparent from $w = Li^2/2$, as the inductor current increases in magnitude, the inductor absorbs energy into its magnetic field. When the current decreases in magnitude, the inductor acts like a source of energy and delivers energy to the circuit from its magnetic field. But, of course, all the energy it delivers, it has [illegible]ly received in electrical form.

approaches a short circuit ($X_L = \omega L \to 0$), in agreement with dc results. (A dc voltage or current is sometimes considered to be a sinusoid of zero frequency.) At the other frequency extreme, as the frequency gets large and approaches infinity, the inductor approaches an open circuit ($X_L = \omega L \to \infty$).

The third and last important observation regarding inductor voltage is that it leads the inductor current by 90°. This is apparent from comparing $v = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta)$ and $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$. Both sinusoids have the same argument of $\omega t + \theta$, but the voltage is the cosine of this argument and the current is the sine of it. Of course, for the same time argument, a cosine leads a sine by 90°. This fact is important enough to repeat. For sinusoids, *the inductor voltage leads the inductor current by 90°* or, alternatively, *the inductor current lags the inductor voltage by 90°*. Figure 10-20 illustrates this phase difference. The dashed vertical lines are at times for which the 90° phase difference is most obvious.

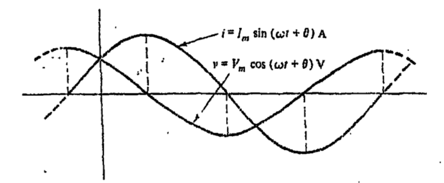


FIGURE 10-20

Example. A voltage $v = 100 \sin(\omega t + 30°)$ V is across a 2-H inductor. What is the inductor current for (a) $\omega = 5$ rad/s and for (b) $\omega = 50$ rad/s?

Solution. (a) For $\omega = 5$ rad/s the inductor reactance is $X_L = \omega L = 5 \times 2 = 10\ \Omega$. This divided into the voltage peak gives the current peak: $I_m = 100/10 = 10$ A. The only other quantity needed is the phase angle. And we can get this from the fact that the current lags the voltage by 90°. So,

$$i = 10 \sin(5t + 30° - 90°) = 10 \sin(5t - 60°) \text{ A}$$

(b) For $\omega = 50$ rad/s the reactance is $X_L = 50 \times 2 = 100\ \Omega$, giving a current peak of $I_m = 100/100 = 1$ A. This with the 90° phase lag results in

$$i = 1 \sin(50t + 30° - 90°) = \sin(50t - 60°) \text{ A}$$

Notice that the current peak decreased from 10 A to 1 A with an increase of frequency from 5 to 50 rad/s.

Example. A 0.1-H inductor has a current of $i = 15 \cos(20t + 10°)$ A. What is the inductor voltage?

Solution. The reactance is $X_L = \omega L = 20 \times 0.1 = 2\ \Omega$. Consequently, $V_m = X_L I_m = 2 \times 15 = 30$ V. Then because v leads i by 90°, $v = 30 \cos(20t + 10° + 90°) = 30 \cos(20t + 100°)$ V.

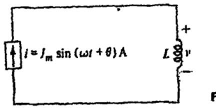


FIGURE 10-19

he next step requires the derivative of a sinusoid. From calculus this is

$$\frac{d}{dt}[\sin(\omega t + \theta)] = \omega \cos(\omega t + \theta)$$

So,

$$v = LI_m \frac{d}{dt}[\sin(\omega t + \theta)] = \omega LI_m \cos(\omega t + \theta)$$

What is the significance of this result? One very important fact is that the sinusoidal inductor current produces a sinusoidal inductor voltage. Further, the sinusoids have the same frequency. Also, because we could as well have considered the inductor voltage as being applied and the inductor current the response, it follows that a sinusoidal inductor voltage produces a sinusoidal current of the same frequency.

The fact that a sinusoidal excitation of an inductor produces a sinusoidal sponse of the same frequency may not seem unexpected because it is also true of resistor, as we have discussed. In general, for a linear resistor an excitation of a rtain waveshape produces a response of the same waveshape. But for an inductor is is rare. A square-wave inductor voltage does not produce a square-wave inductor current; a sawtooth inductor voltage does not produce a sawtooth inductor current; a triangular inductor voltage does not produce a triangular inductor current, and so on. So, it is really unusual for an inductor excitation and response to have the same wave shape. In fact, a sinusoid is about the only practical wave for which this is true.

Another important fact from $v = \omega LI_m \cos(\omega t + \theta) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ is that the peak inductor voltage is ωL times the peak inductor current: $V_m = \omega LI_m$ and $I_m = V_m/\omega L$. Compare these with the resistor relations $V_m = RI_m$ and $I_m = V_m/R$. Clearly, an inductor has a current limiting action similar to that of a resistor, with ωL corresponding to R. Because of this correspondence, this ωL has a name: *inductive reactance*, and a quantity symbol, X_L.

$$\boxed{X_L = \omega L}$$

Being the ratio of a voltage to a current, inductive reactance has the unit of ohm, just as does resistance.

Notice that this reactance, this current-limiting property, is not only proportional to inductance but also to frequency. The greater the sinusoidal frequency, he greater the reactance. Resistance, in contrast, is not a function of frequency.

Observe from ωL that as the frequency approaches zero, the inductor

Solution. We first square the wave as shown in Fig. 10-18. Then we find the average value of the squared wave for one period. The way to do this is to find the area under the squared wave for one period and then divide this area by the period, which is the base.

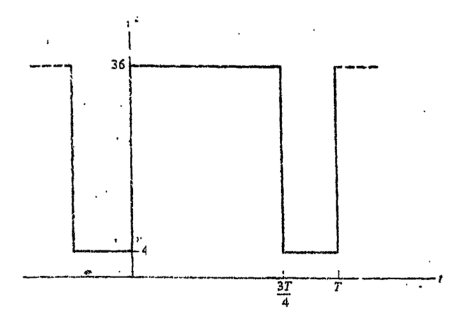


FIGURE 10-18

Then,

$$\text{area} = 36 \times \tfrac{3}{4}T + 4 \times \tfrac{1}{4}T = 28T$$

$$\text{average value} = \frac{\text{area}}{\text{base}} = \frac{28T}{T} = 28$$

As a last step we take the square root: $V_{rms} = \sqrt{28} = 5.3$ V.

This example for a nonsinusoidal wave is included only to illustrate the generality of the rms procedure. But in the following chapters, the rms or effective values we will consider will almost all be for sinusoids. One other matter: Notice that capital letters indicate effective or rms values. This agrees with the convention to use capitals for quantities that do not vary with time.

INDUCTOR SINUSOIDAL RESPONSE

In Fig. 10-19 a sinusoidal current source provides current to an inductor. What is the inductor voltage? To find this voltage we can use the basic inductor current–voltage equation $v = L\, di/dt$, which is valid regardless of the current waveshape. Here,

$$v = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}[I_m \sin(\omega t + \theta)] = LI_m\frac{d}{dt}[\sin(\omega t + \theta)]$$

stoves, hot water heaters, and clothes dryers require this voltage. Whenever a sinusoidal voltage or current is specified as a certain value, we should assume that this is the effective value.

There is another name besides *effective value* for this equivalent dc value that produces the same average power dissipation. This other name is *root mean square* or more commonly *rms*, the abbreviation. The corresponding voltage and current notation is V_{rms} and I_{rms}. Because the reason for the name *root mean square* requires calculus, we will not go into it. Instead, we will consider the result. A mathematical method of finding the effective value of *any* periodic voltage or current, and not just sinusoids, is to

(1) *Square* the periodic voltage or current.
(2) Find the average of the square over one period. Another name for this average is the *mean*.
(3) Take the square *root* of this average.

The words in italics give the origin of the name *root mean square*, although perhaps a better ordering of the name would be *square mean root*, since squaring is the first step and taking the square root is the last step.

Example. Use the rms approach to find the effective value of $I_m \sin(\omega t + \theta)$.

Solution. First, we square the current: $I_m^2 \sin^2(\omega t + \theta)$. Next, we find the average of this square. To do this we can use the trigonometric identity $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ to get

$$I_m^2 \sin^2(\omega t + \theta) = \tfrac{1}{2} I_m^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\theta)]$$

From this result we see that the average of the square is $I_m^2/2$, the first term, because the sinusoid $\cos(2\omega t + 2\theta)$ of the second term has an average of zero over a period of the original wave. Finally, we take the square root of this average, getting $I_m/\sqrt{2}$, the same result as from the power consideration.

Example. Find the rms value of the periodic wave of Fig. 10-17.

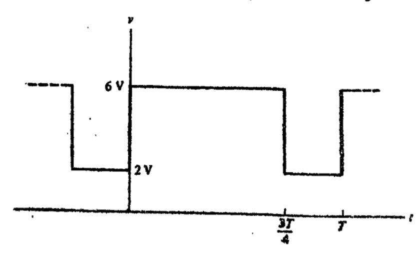


FIGURE 10-17

Multiplying both sides by R and taking the square root, we get the very important relation

$$V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707 V_m$$

which specifies that *the effective value of a sinusoidal voltage is its peak value divided by the square root of 2.* In this derivation, notice that R divides out. Consequently, the effective value is independent of R.

If we used the same approach for $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$, in a similar manner we would get

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

which specifies that *the effective value of a sinusoidal current is its peak value divided by the square root of 2.*

As should be apparent from the definition of effective value, an effective value can be used just like a dc value to find the average power dissipated in a resistor:

$$P_{av} = \frac{V_{eff}^2}{R} \quad \text{and} \quad P_{av} = I_{eff}^2 R$$

Example. A sinusoidal voltage of 10 V peak value is impressed across an 8-Ω resistor. What is the average power dissipated in the resistor?

Solution. Here, $V_{eff} = V_m/\sqrt{2} = 10/\sqrt{2}$. So,

$$P_{av} = \frac{V_{eff}^2}{R} = \frac{(10/\sqrt{2})^2}{8} = 6.25 \text{ W}$$

Example. A 20-Ω resistor carries a current of $8 \cos(377t + 30°)$ A. What is the average power dissipated in the resistor?

Solution. With the current specified, the most convenient formula is $P_{av} = I_{eff}^2 R$. For this current, $I_{eff} = 8/\sqrt{2}$. So $P_{av} = (8/\sqrt{2})^2 \times 20 = 640$ W. Notice that the frequency and phase angle of the current did not enter into this calculation.

Since the voltages at electric outlets are sinusoids, sinusoidal effective values are used for the voltage specifications of electrical appliances. For example, an electric stove may require 120 V, 60 Hz, ac. This 120 V is the effective value of the voltage required, which is the voltage at the usual household electric outlets. The required frequency of 60 Hz is the U.S. nationwide standard for electric power generation. In radians per second this frequency is $\omega = 2\pi(60) = 377$ rad/s. So, the actual voltage required for this stove is $120\sqrt{2} \sin(377t + \theta) = 170 \sin(377t + \theta)$ V. The peak value is, of course, the effective value times the square root of 2. The other voltage commonly required for some electrical appliances is 240 V. Again, this is the effective value of a sinusoidal voltage. Some electric

current that would produce the same average power loss in a resistor that the periodic voltage or current would. We will now consider how to calculate this effective value.

First, we will consider how to experimentally find the effective value. Although finding it mathematically is easier, the experimental approach has the advantage of giving insight as to what an effective value really is. The system of Fig. 10-16 will do. The dc voltage source on the right is variable, with a voltmeter across it

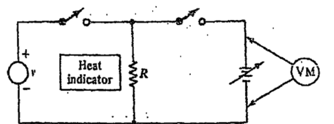


FIGURE 10-16

for indicating its voltage. The source on the left produces a periodic voltage v that we want the effective value of. The resistor R, in which the heat is dissipated, can be of any value. And the heat indicator is an instrument for indicating the *average* heat dissipated in the resistor R. Because the actual value of average heat dissipated is unimportant, this instrument can be something as simple as a bowl of water in which the resistor is immersed and a thermometer for measuring the water temperature.

To find the effective value of v we close the switch to connect the periodic voltage source to R. Then we wait a few minutes for temperatures to stabilize and take a reading of the heat indicator. For the simple water and thermometer system, this is the temperature reading of the thermometer. Next, we disconnect the periodic voltage source and close the switch to the variable dc voltage source. Finally, we vary this voltage until the heat indication is the same as that for v. Then the voltmeter reading of this dc voltage is the effective value of the periodic voltage v. If the periodic source were a current source instead, we could find its effective value with a similar experimental arrangement.

As mentioned, such experimental methods are unnecessary for finding effective values of periodic voltages or currents. A mathematical approach is usually more convenient and accurate. This is especially true for sinusoids, as we will now see. In the last section we found that a voltage $v = V_m \sin(\omega t + \theta)$ across a resistor of R ohms produces an average power dissipation of $V_m^2/2R$ W. And from our study of dc circuits we know that a dc voltage of V volts produces a power dissipation of V^2/R W across the same resistor. Since by definition the effective value of a sinusoidal voltage is that dc voltage which produces the same average power dissipation in the same resistor, we can equate these two powers and solve for the dc voltage. This will be the effective value of the sinusoidal voltage.

For convenience we will call this dc voltage V_{eff}. Then

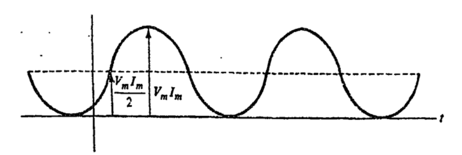


FIGURE 10-15

A plot of this instantaneous power is in Fig. 10-15. It is a sinusoid of $-V_m I_m \cos(2\omega t + 2\theta)/2$ "riding" on top of a constant of $V_m I_m/2$.

Another and equivalent way of considering this plot is as the product of the voltage and current curves of Fig. 10-14. For each instant of time, the point of the power curve is the product of the points of the voltage and current curves at this same time. This product can never be negative because for all the times that the voltage curve is negative, the current curve is also negative, and vice versa.

The *average* power supplied to a resistor over a period is important. Inspection of Fig. 10-15 shows that $P_{av} = V_m I_m/2$ because the superimposed sinusoid is as much above this value as below it. This value is just half the power peak value. There are other ways of expressing this average value, which we can get from $V_m = I_m R$: $P_{av} = V_m^2/2R = I_m^2 R/2$. The average power of $V_m I_m/2$ is also apparent from the basic instantaneous resistor power equation, because the second term, the sinusoidal term, has an average value of zero, leaving the first term of $V_m I_m/2$ for the average value. To repeat for emphasis, the average power absorbed by a resistor of R ohms is

$$P_{av} = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{I_m^2}{2} R$$

EFFECTIVE VALUE

Although sinusoidal voltages and currents vary continuously with time, it is convenient to give them specific values based on some property. In fact, such specific values are desirable for any periodic voltage or current. But how do we select a specific value? Average value will not do because the most important periodic function, the sinusoid, has a zero average value. Peak value may seem better, but then a periodic waveform that is zero for almost all its period and then jumps to a large value for a short time will be classified the same as a dc wave having this high value for all time.

What scientists agreed to was a value based on the equivalent dc heating value. And they called this the *effective value* of the periodic voltage or current. This effective value of a periodic voltage or current equals the value of a dc voltage or

to the present ...
Ohm's law applies regardless ...
wave, sawtooth, or, in particular, sinusoidal.

So, in the circuit of Fig. 10-13,

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m}{R}\sin(\omega t + \theta) = I_m \sin(\omega t + \theta)$$

irrespective of V_m, ω, or θ. And the current peak equals the voltage peak divided by the resistance, and the voltage peak equals the current peak times the resistance: $I_m = V_m/R$ and $V_m = I_m R$. Also important is the fact that *the resistor current and voltage are in phase*, as shown in Fig. 10-14. The fact that the current peak is lower

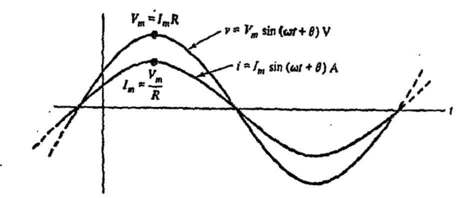


FIGURE 10-14

than the voltage peak is of no importance because the two curves have different scales: one is in volts and the other in amperes.

Now consider the power. The *instantaneous* resistor power dissipation varies with time for sinusoidal excitation because the instantaneous voltage and current vary with time, and the power is the product of these two. Specifically,

$$p = vi = [V_m \sin(\omega t + \theta)][I_m \sin(\omega t + \theta)] = V_m I_m \sin^2(\omega t + \theta)$$

from which we see that the power peak is $V_m I_m$, occurring each time $\sin(\omega t + \theta)$ is $+1$ or -1. And the power is zero when this sinusoid is zero.

We can simplify this power expression by using the trigonometric identity $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, in which $x = \omega t + \theta$. The result is

$$p = \frac{V_m I_m}{2} - \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + 2\theta)$$

which is a constant plus a sinusoid of *twice* the frequency of voltage or current. With the sinusoidal peak of $V_m I_m/2$ of the second term just equaling the constant of the first term, the instantaneous resistor power can never be negative, since the most negative value of the sinusoid just cancels this constant. This cancellation occurs just twice each period—at those instants at which the voltage and current are both zero. The power never being negative means that a resistor never delivers power to a circuit. Instead, a resistor dissipates as heat all the energy it receives.

Example. What is the average value of the periodic voltage v of Fig. 10-12?

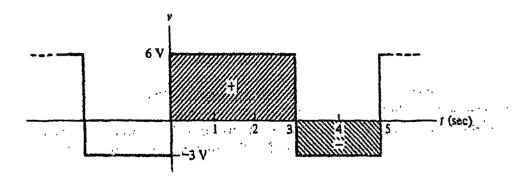


FIGURE 10-12

Solution. Although we can find the average value from any period, the period from $t = 0$ s to 5 s is convenient here. The positive area from $t = 0$ s to $t = 3$ s is $6 \times 3 = 18$ V·s. The area from $t = 3$ s to $t = 5$ s, being below the abscissa, is negative: $-3 \times 2 = -6$ V·s. The total area for this period is the sum of these two areas: $18 + (-6) = 12$ V·s. This divided by the period of 5 s produces an average of $\frac{12}{5} = 2.4$ V.

The average value of any sinusoid is zero because over a period the positive area and negative area cancel in the sum of the two areas. For some purposes, though, a nonzero average is spoken of. By *definition* this "average" is the average over a positive half-cycle. This is the area under this half-cycle divided by a half-period. Because finding this area requires calculus, we will just give the result. For a sine wave of peak value V_m or I_m and period T, the area under a positive half-cycle is V_mT/π V·s or I_mT/π A·s. These divided by $T/2$ s are $2V_m/\pi = 0.637V_m$ V and $2I_m/\pi = 0.637I_m$ A. In other words, by definition the average value of a sinusoid turns out to be 0.637 times the peak value. Notice that this average value does not depend on the period or on the phase angle. We will not use this average value much.

RESISTOR CURRENT AND POWER

The next topic is resistor current and power for a resistor having a sinusoidal voltage across it as in the circuit of Fig. 10-13. Ohm's law, $v = iR$, is valid irrespective of the applied voltage. Our consideration of only dc resistor voltages up

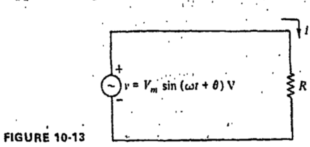


FIGURE 10-13

The easiest way to find the phase difference between two sinusoids is to take the difference of the angles of their arguments, provided that both sinusoids are sine terms or both are cosine terms and that both have the same signs. If one sinusoid is in sine form and the other in cosine form, we should use either $\sin x = \cos(x - 90°)$ to convert the sine term to a cosine term or use $\cos x = \sin(x + 90°)$ to convert the cosine term to a sine term. And if the two sinusoids have different signs, we should preferably convert the negative sinusoid to a positive one by adding or subtracting 180° to or from the phase angle, whichever gives the smaller angle. A common error here is to move the negative sign inside the argument and change the sign of the phase angle. This is not correct! The negative sign is equivalent to a 180° phase shift, and this is different from a change in sign of the phase angle.

Example. Determine the phase relations for the following:

(a) $v = 10\sin(377t + 45°)$ V and $i = 20\sin(377t - 20°)$ A
(b) $v_1 = 4\sin(60t + 10°)$ V and $v_2 = -8\sin(60t + 95°)$ A
(c) $v = 5\cos(20t + 5°)$ V and $i = 7\sin(30t - 20°)$ A
(d) $v = 5\sin(6\pi t + 10°)$ V and $i = 4\cos(6\pi t - 15°)$ A
(e) $i_1 = -6\sin 4t$ A and $i_2 = -9\cos(4t + 30°)$ A

Solution.

(a) Because both sinusoids are of the same form and have the same sign we can get the phase difference from the difference of the phase angles. The phase difference is $45° - (-20°) = 65°$, with v leading i.

(b) We need to eliminate the negative sign of v_2 by subtracting 180° from the phase angle. Subtracting is better than adding because it gives a smaller phase angle: $v_2 = -8\sin(60t + 95°) = 8\sin(60t + 95° - 180°) = 8\sin(60t - 85°)$. The phase difference is $10° - (-85°) = 95°$ with v_1 leading v_2 by this angle.

(c) Since the radian frequency of 20 rad/s of v differs from the 30 rad/s of i, the concept of phase difference does not apply to these sinusoids.

(d) Because v and i are of different sinusoidal form, we should convert one to the form of the other. Selecting to convert i and using the trigonometric identity $\cos x = \sin(x + 90°)$, we get $i = 4\sin(6\pi t - 15° + 90°) = 4\sin(6\pi t + 75°)$. So, i leads v or v lags i by $75° - 10° = 65°$.

(e) Again the sinusoids are of different form. This time, just to be different, we will convert the sine term using $\sin x = \cos(x - 90°)$. Then, $i_1 = -6\cos(4t - 90°)$ and the phase difference is $30° - (-90°) = 120°$ with i_2 leading i_1. Notice that we do not have to eliminate a negative sign because both sinusoids have negative signs.

SINUSOIDAL AVERAGE VALUE

The average value of a *periodic* wave is a quotient of area and time, with the area being that between the wave and the abscissa axis over one period and with the time being this period. The area above the abscissa is positive and that below is negative.



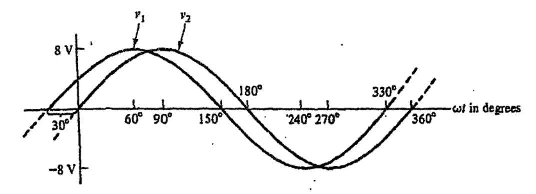


FIGURE 10-10

For a phase comparison to make any sense, sinusoids must have the same frequency. The reason is that the phase angles of sinusoids of different frequencies are simply not comparable because the phase differences continuously change. The sinusoids need not, however, have the same peak values. Our examples so far have had the same peak values only to make clearer the effects of phase difference.

If two sinusoids of the same frequency are zero at the same times and have positive peaks at the same times, the two sinusoids are said to be *in phase*. The sinusoids in Fig. 10-11(a) are in phase. In contrast, the sinusoids of Fig. 10-11(b)

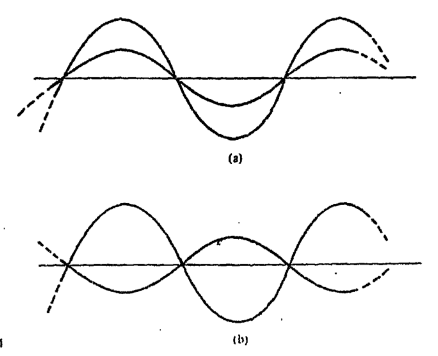


FIGURE 10-11

are just the opposite of these in-phase sinusoids. These have zeros at the same times and peaks at the same times, but the peaks are of opposite polarities. Because this corresponds to a phase difference of 180°, these sinusoids are said to be *180° out of phase*.

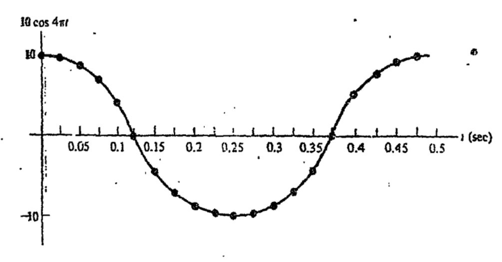


FIGURE 10-9

in Fig. 10-8 we see that the cosine wave has its first peak at $t = 0$ s, but the sine wave has its peak *later*, at $t = 0.125$ s, which time corresponds to 90°. In fact, from comparing the graphs or the two tables, we see that all of the cosine values occur 90° ahead of the corresponding sine values. For this reason we say that the cosine wave *leads* the sine wave by 90°, or that the sine wave *lags* the cosine wave by 90°. Also, we can say that they have a phase angle difference of 90°. Normally, this is just called the *phase difference*. We will discuss this more in the next section.

PHASE RELATIONS

In this section we consider phase differences in general. First, consider how the sinusoid $v_1 = 8 \sin(2\pi t + 30°)$ compares with $v_2 = 8 \sin 2\pi t$. In their mathematical representations, the only difference is an added 30° in the argument of v_1. The argument for v_1 is $2\pi t + 30°$ and that for v_2 is just $2\pi t$. This 30° difference means that v_1 leads v_2 by this 30° or, which is the same thing, v_2 lags v_1 by 30°. Also, their phase difference is 30°. We could specify this phase lead, lag, and difference in radians instead of degrees, but specifying in degrees is far more popular.

Do not be disturbed that in $2\pi t + 30°$ we are indicating an addition of quantities having different units: $2\pi t$ is in radians and 30° is in degrees. Such an addition is impossible: quantities to be added must have the same unit. But wrong as this designation is, it is common practice and not the least bit confusing.

Now having compared the expressions of v_1 and v_2, we will compare their graphs. By substituting in different values of t, we can easily get their graphs, shown superimposed in Fig. 10-10 for comparison. Comparison is aided by having the abscissa units in degrees as illustrated, although these units could be in radians or seconds. It is important to observe here that v_1 reaches its peaks and all other values 30° ahead of or in advance of v_2. This verifies and shows that v_1 leads v_2 by 30°.

a pocket calculator. Notice that the values for the second half-period, from $t =$ 0.25 s to 0.5 s, are the same except for sign as the values for the corresponding times for the first half-period, from $t = 0$ s to 0.25 s. There is even a repetition of values for the first half period: the values for the second quarter period, from $t = 0.125$ s to 0.25 s, are the same, in a backward fashion, as those in the first quarter-period, from $t = 0$ s to 0.125 s. Essentially, we have the values for the whole period after finding them for just the first quarter-period. This repetition of values agrees with our discussion of Fig. 10-6.

Figure 10-8 shows this sine wave with three sets of abscissa units: seconds, radians, and degrees. Naturally, we should select just one of these. But showing

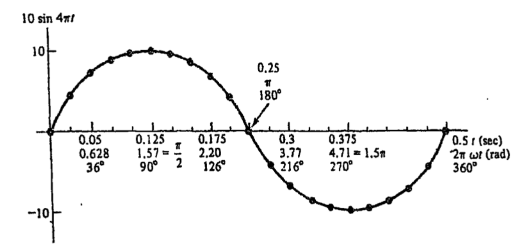


FIGURE 10-8

all three this one time does emphasize the fact that the abscissa units can be any one of these three, whichever is most convenient. Seconds and radians are more popular than degrees.

Next, we will graph $10 \cos 4\pi t$ for a comparison with $10 \sin 4\pi t$. Table 10-2 has the required values. Notice that these are only for the first quarter-period. These are enough because from them we can get corresponding values for the remaining three quarter-periods, for the same reasons as discussed for the sine wave.

Figure 10-9 shows the plot. In comparing this plot with that for the sine wave

Table 10-2

t (s)	$4\pi t$ (rad)	$4\pi t$ (deg)	$10 \cos 4\pi t$
0	0	0°	10
0.025	0.314	18°	9.51
0.05	0.628	36°	8.09
0.075	0.942	54°	5.88
0.1	1.26	72°	3.09
0.125	1.57	90°	0

ice that $\sin 0° = \cos 90°$, $\sin 30° = \cos 60°$, $\sin 45° = \cos 45°$, $\sin 60° =$ 30°, and $\sin 90° = \cos 0°$, which verifies the important relation of $\sin x =$ $(90° - x)$ proved in the study of trigonometry. Other important sine-cosine ations are $\sin x = \cos(x - 90°)$ and $\cos x = \sin(x + 90°)$.

There are also some important relations for sine terms alone, and also for osine terms alone: $\sin(-x) = -\sin x$, which allows us to factor out a negative gn from a sine argument. (The argument is that part of the expression that specifies the angle.) But $\cos(-x) = \cos x$, which specifies that the sign of the cosine argument does not affect the cosine value. A negative sign can be deleted or inserted, whichever is more convenient. Also important are

$$\sin(x + 180°) = \sin(x - 180°) = -\sin x$$
$$\cos(x + 180°) = \cos(x - 180°) = -\cos x$$

These specify that adding or subtracting 180° to or from a sinusoidal argument i equivalent to a sign change. Of course, adding or subtracting an integer multiple f 360° produces no change.

For a better understanding of sinusoids, we will plot a cycle of a particular sinusoid: $10 \sin 4\pi t$. This wave has a peak of 10 and a radian frequency of $\omega =$ π rad/s, which means that $f = 4\pi/2\pi = 2$ Hz. This, in turn, means that its eriod is $T = \frac{1}{2} = 0.5$ s. We will, for convenience, plot the wave for the specific period of $t = 0$ s to 0.5 s at time intervals of 0.025 s.

Table 10-1 shows the values for this plot, which values we can easily get from

Table 10-1

t (s)	$4\pi t$ (rad)	$4\pi t$ (deg)	$10 \sin 4\pi t$
0	0	0°	0
0.025	0.314	18°	3.09
0.05	0.628	36°	5.88
0.075	0.942	54°	8.09
0.1	1.26	72°	9.51
0.125	1.57	90°	10
0.15	1.88	108°	9.51
0.175	2.20	126°	8.09
0.2	2.51	144°	5.88
0.225	2.83	162°	3.09
0.25	3.14	180°	0
0.275	3.46	198°	−3.09
0.3	3.77	216°	−5.88
0.325	4.08	234°	−8.09
0.35	4.40	252°	−9.51
0.375	4.71	270°	−10
0.4	5.03	288°	−9.51
0.425	5.34	306°	−8.09
0.45	5.65	324°	−5.88
0.475	5.96	342°	−3.09
0.5	6.28	360	0

ticular angle ωt. (This drawing of a horizontal line is called *projecting the hypotenuse on the vertical axis.*) Values above the horizontal axis are positive and those below are negative.

We can rotate the hypotenuse counterclockwise to get an idea of the relation between $v = V_m \sin \omega t$ or $i = I_m \sin \omega t$ and the angle ωt. If we start with the hypotenuse at 0°, to the right along the horizontal axis, we get v or i equal to zero because the vertical projection of the hypotenuse is zero. If we increase the angle to 30° ($\omega t = \pi/6$ rad), the angle shown, we find that the vertical projection is one-half the hypotenuse: $v = V_m/2$ or $i = I_m/2$. If we increase the angle to 90° ($\omega t = \pi/2$ rad), the hypotenuse is along the upper vertical axis, and $v = V_m$ or $i = I_m$. As we increase the angle beyond 90°, the hypotenuse goes into the second quadrant. Here, v or i decreases with increasing angle, becoming zero for 180° ($\omega t = \pi$ rad). Increasing the angle further, we see that the vertical projection of the hypotenuse is below the horizontal axis, which means that v or i is negative. At 270° ($\omega t = 3\pi/2$ rad), the hypotenuse is along the lower vertical axis, and $v = -V_m$ or $i = -I_m$. Increasing the angle further to 360° brings the hypotenuse back to its starting point and the whole process repeats.

Although so far we have considered only the sine wave, the cosine wave of $v = V_m \cos \omega t$ or $i = I_m \cos \omega t$, illustrated in Fig. 10-7, is equally important. In fact, the sine wave and cosine wave have a common classification of *sinusoid*. The

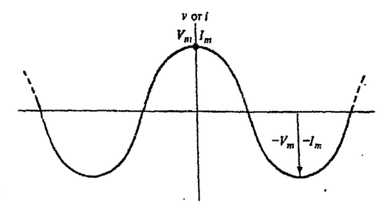


FIGURE 10-7

cosine wave has the same shape as the sine wave. It can also be generated using the vertical projection of the hypotenuse in Fig. 10-6. But for this the hypotenuse line must be along the upper vertical axis at $t = 0$ s.

Despite the ease of evaluating them on a pocket calculator, some sine and cosine values are so frequently used that we should memorize them:

$\sin 0° = 0$ | $\cos 0° = 1$
$\sin 30° = 0.5$ | $\cos 30° = 0.866$
$\sin 45° = 0.707$ | $\cos 45° = 0.707$
$\sin 60° = 0.866$ | $\cos 60° = 0.5$
$\sin 90° = 1$ | $\cos 90° = 0$
$\sin 180° = 0$ | $\cos 180° = -1$
$\sin 270° = -1$ | $\cos 270° = 0$

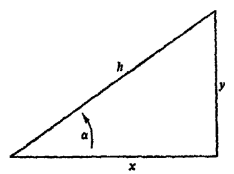


FIGURE 10-5

measure the sides y and h and then take their ratio. But no one does it that way. The way to do it is to enter the angle in degrees into a pocket calculator, punch the sin key, and then get the value from the calculator display. By the way, a calculator is almost essential for the work that follows. It should have at least the trigonometric functions, logarithms, exponentials, square root, powers, and inverse.

The sin ωt in $v = V_m \sin \omega t$ and in $i = I_m \sin \omega t$ is the same sine function as in sin α. The only difference is that the angle ωt is not a constant as α is. Because the angle ωt varies with time, we need a different way of showing the triangle for $v = V_m \sin \omega t$ or for $i = I_m \sin \omega t$. Perhaps the best way is, as in Fig. 10-6, on a

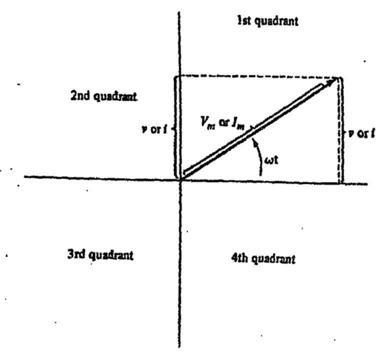


FIGURE 10-6

plane having horizontal and vertical axes that divide the plane into four parts, called *quadrants*. Here the hypotenuse is a radial line extending from the origin, and the angle ωt is the angle between the horizontal axis and the hypotenuse. As can be seen from drawing a horizontal line from the tip of the hypotenuse to the vertical axis, the height of the hypotenuse is the value of v or i corresponding to the par-

The radian has a relation to angular measurement in degrees. If as in Fig. 10-4 a length equal to the radius is marked off on the circumference of a circle, the radian is the angle subtended by this radius length, r. Because the circumference

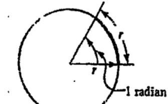


FIGURE 10-4

equals $2\pi r$, it follows that there are 2π radians in 360°, the total angle of a circle. Consequently,

$$\boxed{1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ}$$

We can use this radian–degree relation to convert an angle in degrees to one in radians, or vice versa.

$$\text{angle in radians} = \frac{\pi}{180^\circ} \times \text{angle in degrees}$$

and

$$\text{angle in degrees} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \text{angle in radians}$$

Some radian–degree relations are so common that we should memorize them: $30^\circ = \pi/6$ rad, $60^\circ = \pi/3$ rad, $90^\circ = \pi/2$ rad, $180^\circ = \pi$ rad, $270^\circ = 3\pi/2$ rad, and $360^\circ = 2\pi$ rad.

Returning to our sinusoidal wave of $V_m \sin \omega t$ or $I_m \sin \omega t$, we should notice that the t in ωt produces a continuous change in the angle, causing the product ωt to increase linearly with time. Of course, ωt represents an angle increasing with time because ω has units of radians per second while t has units of seconds. So, their product has units of radians. For evaluating $\sin \omega t$, however, we usually prefer to have this angle in degrees, as we shall see.

If we knew the value of ω and of V_m and I_m, we could graph both $v = V_m \sin \omega t$ and $i = I_m \sin \omega t$, provided that something like sin 30° or sin 45° made sense to us. So, we will look into this. As may be recalled from trigonometry, the sine is based on the right triangle as shown in Fig. 10-5. In this triangle the angle α is measured in a *counterclockwise* direction from the horizontal. It is important to remember to measure positive angles in a counterclockwise direction and negative angles in a clockwise direction. The three sides x, y, and h have specific names: x is *the side adjacent the angle* (α), y is *the side opposite the angle*, and h is the *hypotenuse*. By Pythagorean's theorem, $h = \sqrt{x^2 + y^2}$. And by definition, $\sin \alpha = y/h$, $\cos \alpha = x/h$, and $\tan \alpha = y/x$.

To evaluate a sine quantity we could construct a triangle as in Fig. 10-5,

nusoidal voltage and ac current means sinusoidal current. Other alternating aves are simply designated by name, such as square wave, triangular wave, and on.

We will devote all of this chapter and most of the remaining chapters to the analysis of ac circuits—circuits with sinusoidal voltage and current sources. Why all this emphasis on circuits having this one type of source? What is so important about sinusoids?

One reason for the importance of sinusoidal analysis is that almost all electrical power, at least large amounts of power, is generated sinusoidally. As is described in Chap. 18, ac voltage generators, also called *alternators*, generate these sinusoidal voltages. There is some distortion of these voltages on transmission. But even so, the voltages at common electric outlets are nearly perfect sinusoids. Another reason for the importance of sinusoidal analysis is that all information in electrical form—every electrical signal—is a sum of sinusoids. This is true whether the electrical signal is John Denver's voice or weather information from a satellite, or whatever. Because all practical signals are sums of sinusoids, if we can analyze circuits that are sinusoidally excited, we can analyze a circuit excited by any practical signal. And that is important! Now having some understanding of the importance of sinusoids, we will study them in detail in the next section.

SINE AND COSINE WAVES

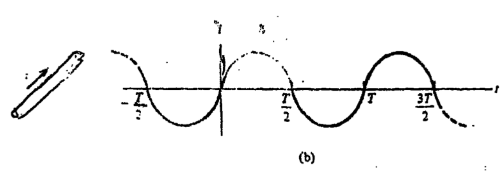
From Figs. 10-2(b) and 10-3(b) we have a good idea of the shape of a sine wave. Mathematically, though, a sine wave is described by $v = V_m \sin \omega t$ if it is a voltage and by $i = I_m \sin \omega t$ if it is a current. In these expressions the v and i represent *instantaneous* values and so are in lowercase, as is conventional. The V_m for voltage maximum and I_m for current maximum are the wave amplitudes or peak values. It is conventional to use uppercase letters for these. The peak value or amplitude, both mean the same, is the maximum value that a sinusoidal wave gets above the horizontal axis if the wave is plotted. The negative of this peak is the maximum negative value.

In $V_m \sin \omega t$ and $I_m \sin \omega t$ is ω, the Greek lowercase letter omega. It is the quantity symbol for a frequency that is related to the SI unit of plane angle, the *radian*, with unit symbol rad. Specifically, ω is the *radian frequency* of the sinusoid in *radians per second*, the unit symbol for which is rad/s. This ω is related to f, the wave frequency in hertz, by

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

which specifies that the frequency of a wave in radians per second is 2π times the frequency in hertz. For example, 60 Hz = $2\pi \times 60 = 377$ rad/s.

When the term *frequency* is used, we will have no confusion as to which frequency is intended because of its context—the way the word is used and the words around it. Of course, if the units of hertz or radians per second are given, there is no question which frequency is intended.



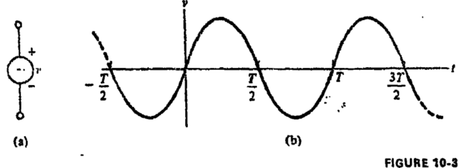
(b)

FIGURE 10-2

current that flows in a direction opposite to the reference arrow. So, current flows against this arrow from $t = -T/2$ s to $t = 0$ s, and also from $t = T/2$ s to T s, and so on.

Because the sawtooth wave of Fig. 10-1(c) does not go below the abscissa, it is never a negative current and so never reverses direction of flow even though its magnitude varies with time. The same is true for the cosine plus dc wave of Fig. 10-1(e).

As may be guessed, what is said above for direction of alternating currents applies as well to polarity of alternating voltages. To understand this, consider the voltage source of Fig. 10-3(a) and its output sinusoidal waveform of Fig. 10-3(b). The waveform portions *above* the abscissa designate positive voltage,



(a) (b)

FIGURE 10-3

which in turn means that the actual voltage polarity agrees with the reference polarity in Fig. 10-3(a). So, the voltage has the indicated polarity for times $t = 0$ s to $T/2$ s and from $t = T$ s to $3T/2$ s, and so on. Those waveform portions *below* the abscissa designate negative voltages, which means that the actual voltage polarity is opposite the reference polarity in Fig. 10-3(a). So, from $t = -T/2$ s to 0 s and from $t = T/2$ s to T s, the actual voltage polarity of the source of Fig. 10-3(a) is positive on the bottom and negative on the top—opposite the reference. Incidentally, notice the symbol for the sinusoidal voltage source. It is a circle with ~ inside to indicate a sinusoidal cycle.

As mentioned, the term ac is an abbreviation for alternating current. Actually, it is more than that. *By common usage ac means sinusoidal.* So, ac voltage means

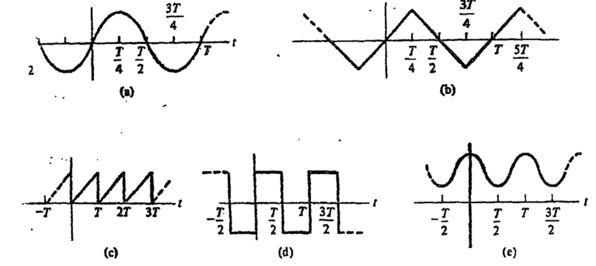


FIGURE 10-1

In Fig. 10-1(a) is the most popular periodic wave, the sine wave, which is the incipal wave for this and most of the remaining chapters. Figure 10-1(b) is a angular wave, Fig. 10-1(c) is a sawtooth wave, Fig. 10-1(d) a square wave, nd Fig. 10-1(e) a cosine wave superimposed on dc. These are examples of periodic aves, as mentioned. And all but the sawtooth wave of Fig. 10-1(c) and the wave of Fig. 10-1(e) are also alternating, as will be explained. Electronic oscillators can be purchased for generating these waves. Of course, in Sec. 8-10 we studied a relaxation oscillator that generated a sawtooth wave like that of Fig. 10-1(c).

From Fig. 10-1 do not receive the impression that the period is always measured from the time that a wave goes through zero, which naturally cannot be true for the wave of Fig. 10-1(e) because it is never zero. Also, the starting time for measuring a period does not have to be $t = 0$ s. This starting time can be any time. The period, then, is the time between this starting time and the instant of time at which the wave first repeats—a period is the duration of a cycle.

An *alternating current* is a periodic current that varies with time such that during part of each period the current flows in one direction, and then for the remaining time reverses and flows in the opposite direction. This reversal is indicated in Figs. 10-1(a), (b), and (d) by the waves being positive or above the abscissa for a portion of a cycle and negative or below the abscissa for the remainder of the cycle.

Perhaps this point needs more explanation. Figure 10-2(a) shows a wire carrying a current with a reference direction as indicated. Figure 10-2(b) shows the current waveform, which happens to be sinusoidal. The portions of the wave *above* the abscissa designate positive current flow. By definition this is flow in the direction of the reference arrow. So, current flows in the direction of the arrow for time $t = 0$ s to $T/2$ s, and also from $t = T$ s to $3T/2$ s, and so on. The waveform portions *below* the abscissa indicate negative currents. By definition a negative current is a

Sinusoidal Alternating Current and Voltage

INTRODUCTION

Up to this point of our study, the independent voltage and current sources have all been dc. Now we begin the study of the analysis of networks having ac sources. The term *ac* is, of course, just an abbreviation for *alternating current*.

The word *alternating* usually refers only to a *periodic* current or voltage. And periodic means that the current or voltage varies with time such that it repeats itself after a fixed time called the *period*. Figure 10-1 shows some periodic waves that may be either voltages or currents. Strictly speaking, each of these waves has no beginning and no end. Actually, of course, every practical electrical voltage or current has a beginning and an end.

In Fig. 10-1 each horizontal axis (*abscissa*) is in time. Along each abscissa, the indicated period T is the *shortest* time in which a wave begins to repeat. The inverse of the period is the wave *frequency*, which is measured in the SI unit of *hertz* with unit symbol Hz. Named in honor of the German physicist Heinrich R. Hertz (1857–1894), the hertz replaces the old unit of cycles per second. (A cycle is the segment of a wave occurring during one period.) The quantity symbol for frequency is f. So,

$$f = \frac{1}{T}$$

